

## Betrachtung eines Bessel-TP --- 21. Okt. 2017 Ingenieurbüro Baumann, Dorsten

- `reset():MAXDEPTH:=1000:ta:=time():DIGITS:=32:w:=2*PI*f:`  
die Eingangsdaten

- `n:=4:fg:=10e3:ue2:=1:`

die Berechnungen

- `wg:=2*PI*fg:`

- `b:=[fact(2*n-(i-1))/(2^(n-(i-1))*fact(i-1)*fact(n-(i-1))) $  
i=1..n+1]:b0:=b[1]:a0:=b0:`

- `delete i:U2U0:=(f)->b0/(a0*(1+1/ue2))*a0/sum(b[i+1]*(I*w/wg)^i,  
i=0..n):`

- `U2U0dB:=(f)->20*log(10,abs(U2U0(f))):`

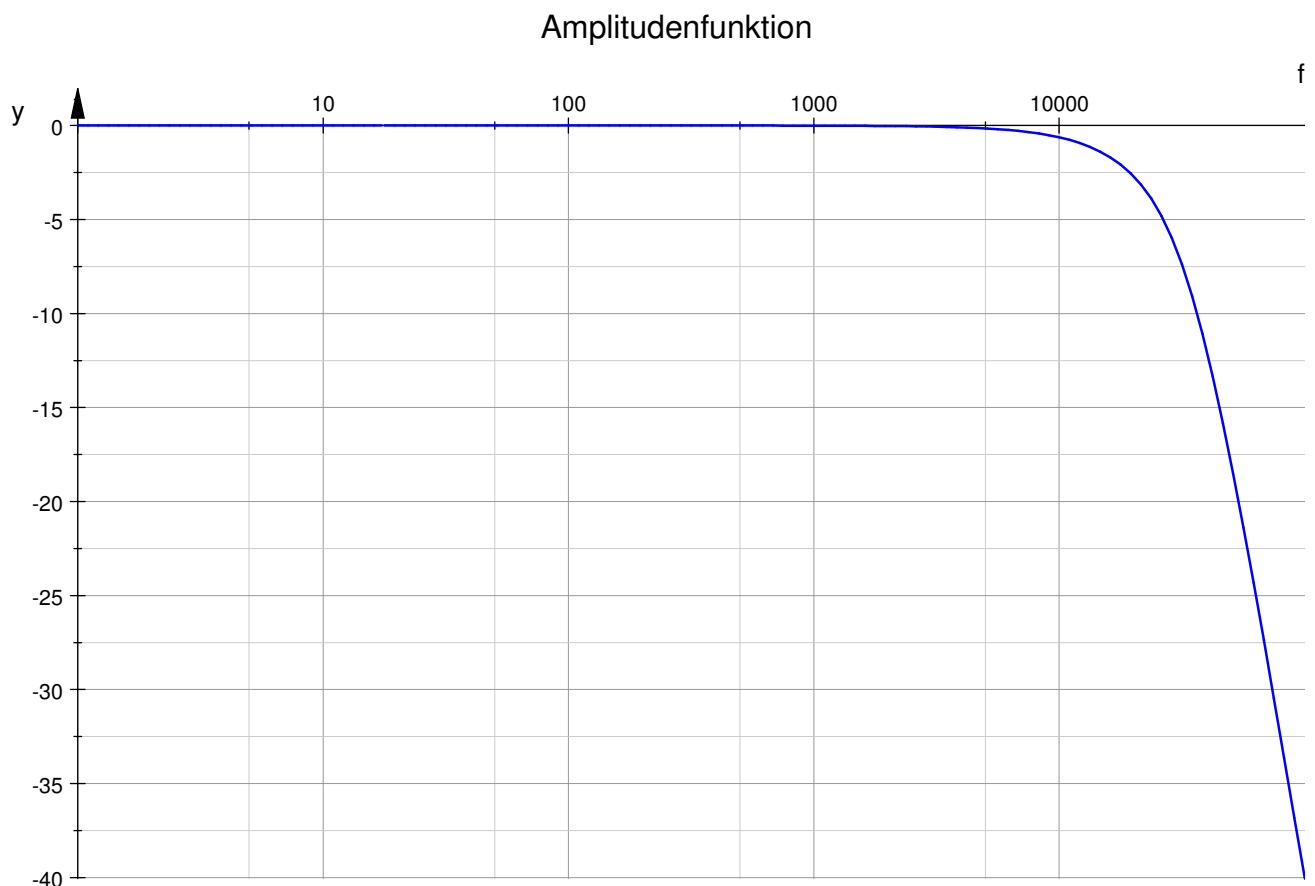
- `Winkel:=(f)->180/PI*arctan(Im(U2U0(f))/Re(U2U0(f))):`

- `Winkel:=(f)->180/PI*arg(U2U0(f)):`

- `tg1:=(f)->-diff(Winkel(f),f)/360:`

Betrag der Übertragungsfunktion, doppelt logarithmisch

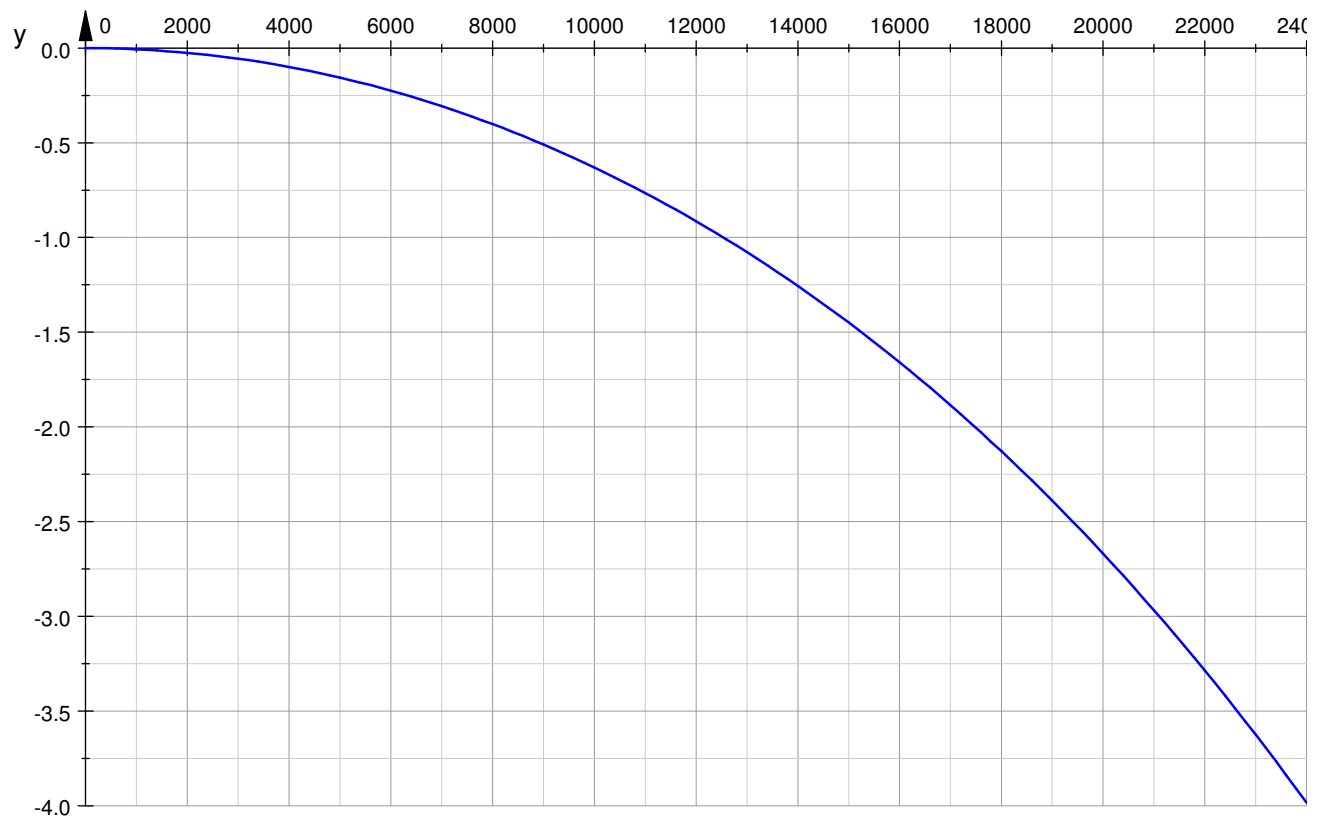
- `plotfunc2d(U2U0dB(f)+6.02, f=1..10*fg, LegendVisible=FALSE,  
CoordinateType=LogLin,  
GridVisible=TRUE, SubgridVisible=TRUE,  
Height=120*unit::mm, Width=180*unit::mm  
,Header="Amplitudenfunktion"):`



Ausschnittsvergrößerung aus dem Betrag der Übertragungsfunktion

- `plotfunc2d(U2U0dB(f)+6.02, f=0..2.4*fg, LegendVisible=FALSE,  
GridVisible=TRUE, SubgridVisible=TRUE,  
Height=120*unit::mm, Width=180*unit::mm, Header="Vergrößerung  
Amplitudenfunktion"):`

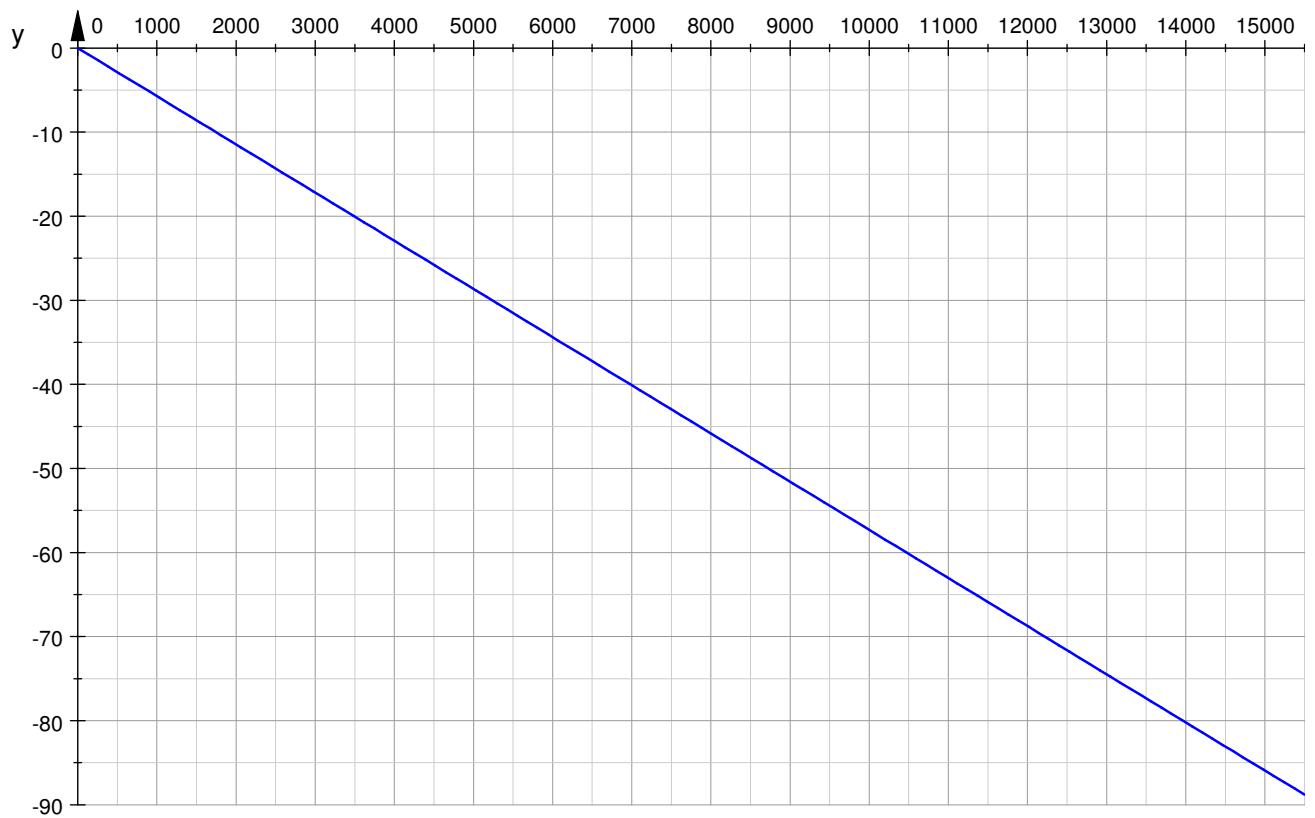
## Vergößerung Amplitudenfunktion



### die Phasenverschiebung des Filters

- ```
plotfunc2d(Winkel(f), f=0..1.55*fg, LegendVisible=FALSE,  
            GridVisible=TRUE, SubgridVisible=TRUE,  
            Height=120*unit::mm, Width=180*unit::mm,  
            Header="Phasenfunktion"):
```

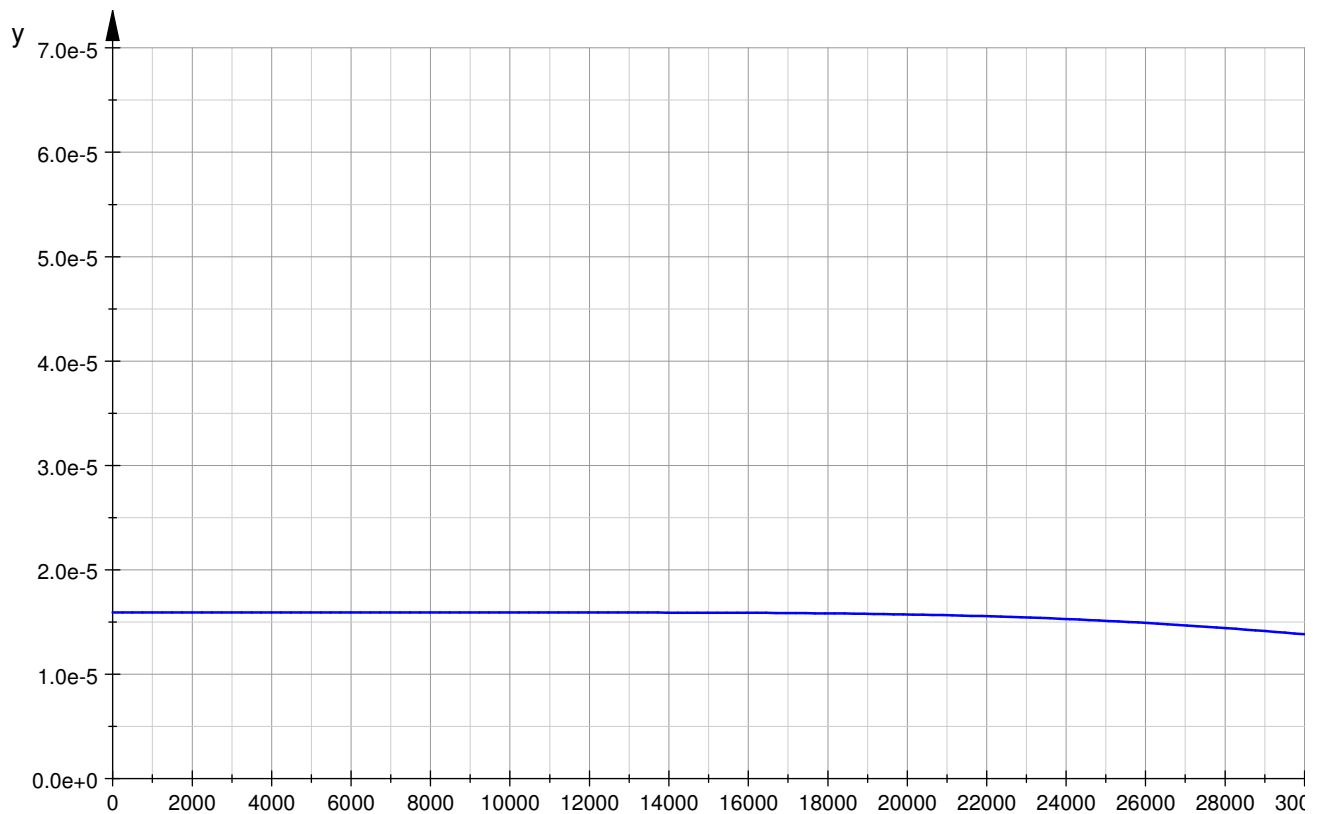
## Phasenfunktion



### Gruppenlaufzeit aus dem differenzierten Phasenverlauf

- `plotfunc2d(tg1(f), f=0..3*fg, LegendVisible=FALSE, GridVisible=TRUE, SubgridVisible=TRUE, Height=120*unit::mm, Width=180*unit::mm, Header="Gruppenlaufzeit", YRange=0..7e-5):`

## Gruppenlaufzeit



das Bessel-Polynom ohne die Grunddämpfung

- `Poly := (F) -> expand (sum (b [i+1] * (F) ^i, i=0..n)) : b;`  
`[105, 105, 45, 10, 1]`

- `a0 / Poly (F) ;`

$$\frac{105}{F^4 + 10 \cdot F^3 + 45 \cdot F^2 + 105 \cdot F + 105}$$

die Grunddämpfung durch  $\frac{1}{2}$

- `b0 / (a0 * (1 + 1/ue2)) ;`

$$\frac{1}{2}$$

- `delete i: Pol := float (solve (Poly (F) = 0, F)) :`
- `delete Liste: for i from 1 to n do`  
`PolTab [i] := op (Pol, i) :`  
`end_for :`
- `Liste := [ [Re (op (op (PolTab, i), 2)), Im (op (op (PolTab, i), 2)), RGB :: Blue]`  
`$ i=1..n] :`
- `Liste := Liste. [ [3, 0, RGB :: White]] . [ [0, 3, RGB :: White]] . [ [-`  
`3, 0, RGB :: White]] . [ [0, -3, RGB :: White]] :`

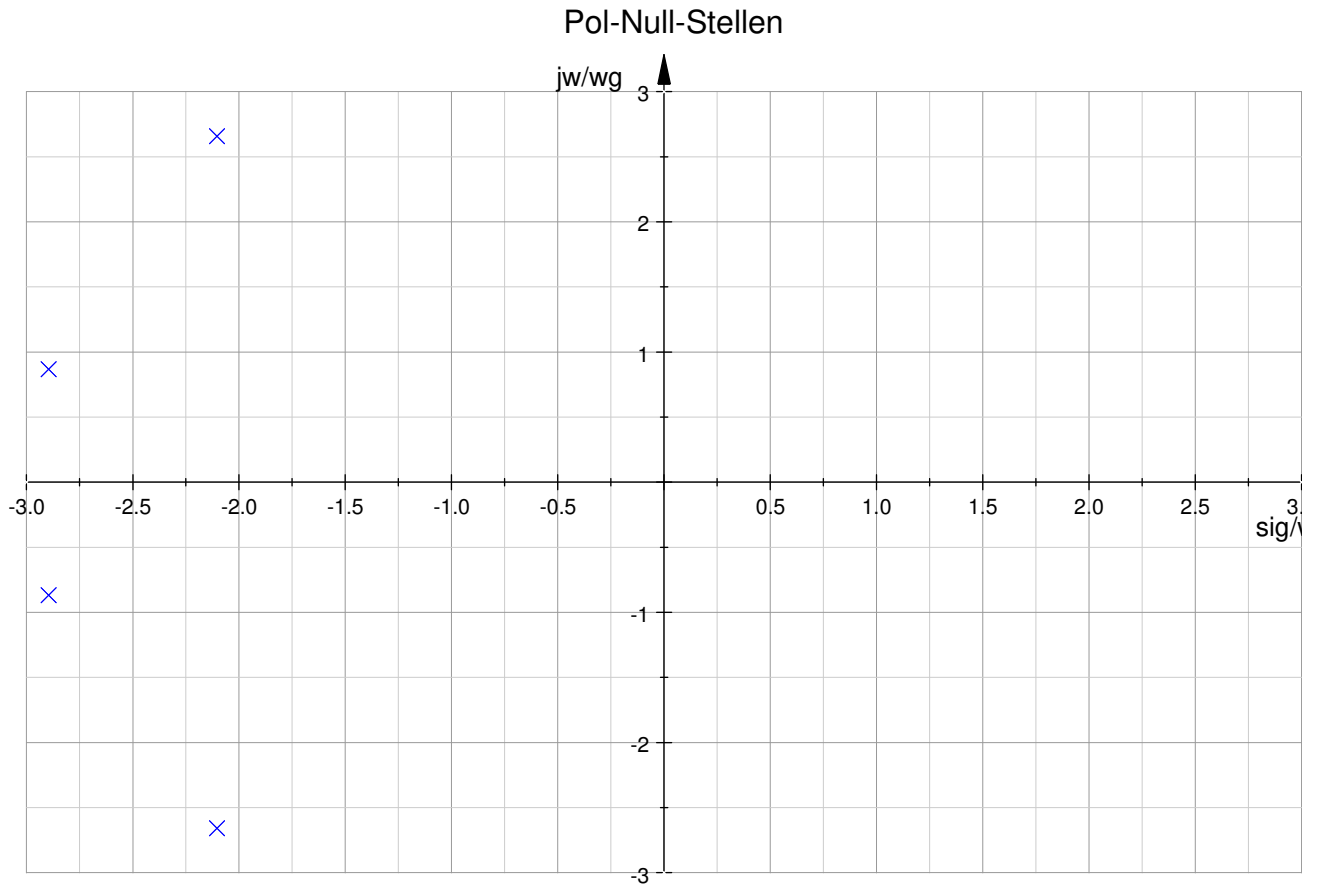
die Lage der Pol-Nullstellen in der komplexen Ebene

- `plot (plot :: PointList2d (Liste, PointStyle = XCrosses, PointSize = 2,`  
`GridVisible = TRUE, SubgridVisible = TRUE,`

```

Scaling=Unconstrained,
AxesTitles=["sig/wg", "jw/wg"], Height=120*unit::mm,
Width=180*unit::mm, Header="Pol-Null-Stellen"):

```



die Pol-Nullstellen

- `PolTab;`

$$\begin{cases}
 1 &= -2.103789397179627831605606074724 + 2.6574180418567527168583220986318 \cdot i \\
 2 &= -2.103789397179627831605606074724 - 2.6574180418567527168583220986318 \cdot i \\
 3 &= -2.896210602820372168394393925276 - 0.86723412893450375181897321492012 \cdot i \\
 4 &= -2.896210602820372168394393925276 + 0.86723412893450375181897321492012 \cdot i
 \end{cases}$$

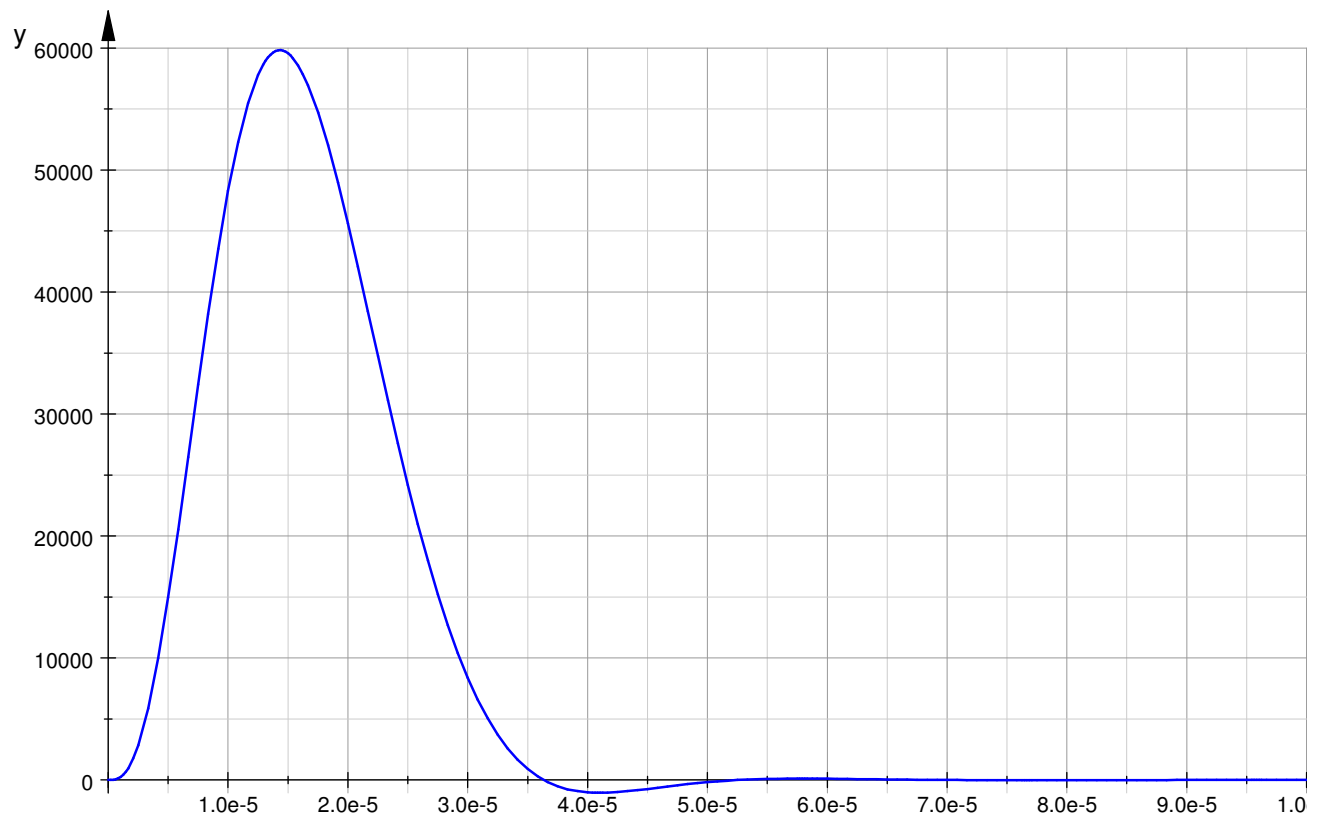
Antworten des Filters mit  $ua(t)=\text{invlaplace}(L\{ue(t)\} \cdot T(p))$

- `prodp:=_mult(p/wg-op(Pol,i) $ i=1..n):`

Impulsantwort des Filters  $L\{ue(t)\}=1$

- `ua:=(t)->Re(transform::invlaplace(b0/(1+1/ue2)*2/prodp,p,t)):`
- `plotfunc2d(ua(t), t=0..1/fg, LegendVisible=FALSE, CoordinateType=LinLin, GridVisible=TRUE, SubgridVisible=TRUE, Height=120*unit::mm, Width=180*unit::mm, Header="Impulsantwort"):`

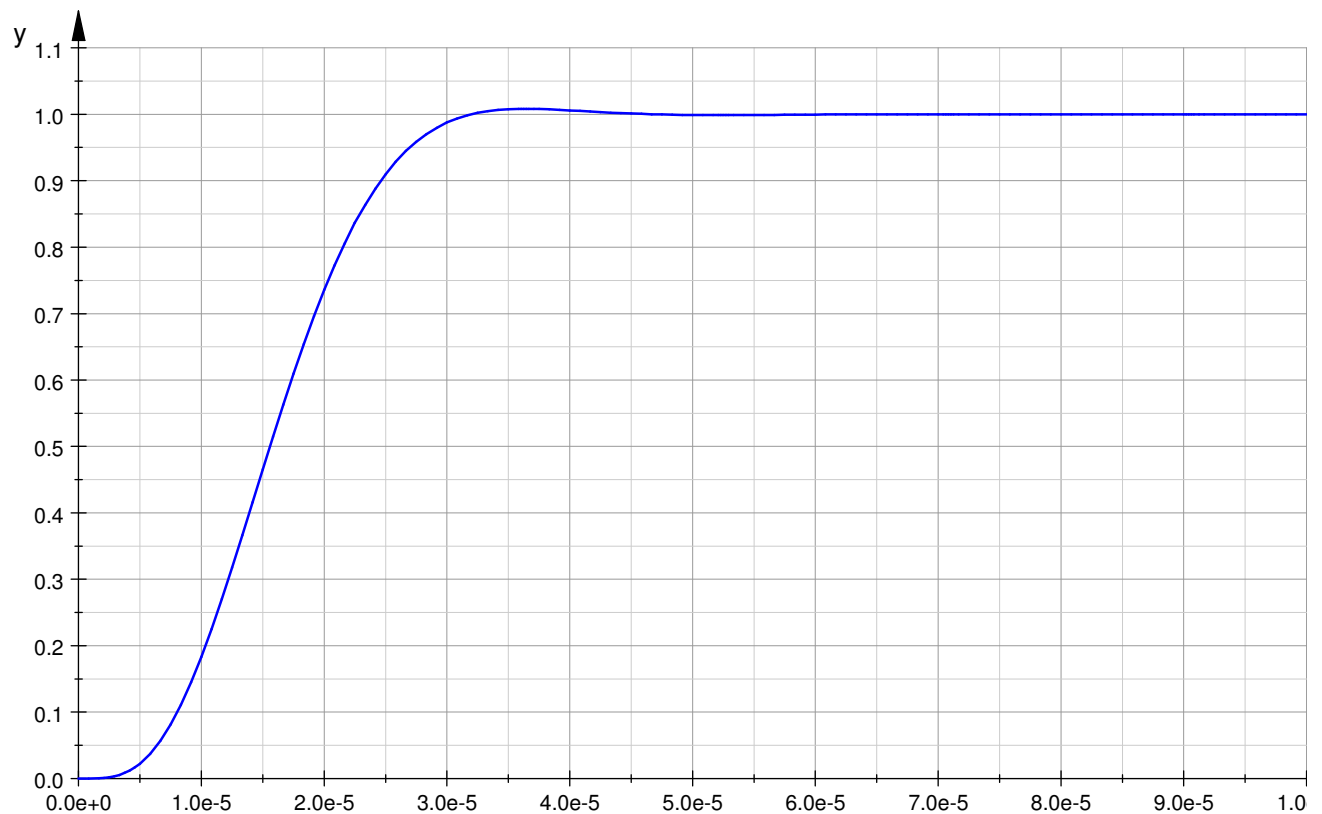
## Impulsantwort



Sprungantwort des Filters  $L\{u(t)\}=1/p$

- `ua:=(t)->Re(ttransform::invlaplace(b0/(1+1/ue2)*2/p/prodp,p,t)):`
- `plotfunc2d(ua(t), t=0..1/fg, LegendVisible=FALSE, CoordinateType=LinLin, GridVisible=TRUE, SubgridVisible=TRUE, Height=120*unit::mm, Width=180*unit::mm, Header="Sprungantwort", YRange=0..1.1):`

## Sprungantwort



### Suchbereich für Flankendaten

- `anf:=0;ende:=1/2/fg;`

### Überschwingen in % bei t in us

- `maximum:=op(numeric::solve(diff(ua(t),t)=0,t=0..1/2/fg,RestrictedSearch),1);`
- `(ua(maximum)-1)*100;maximum/1e-6;`  
0.83541995143491402793358118472718  
36.354919486450169423964526030568

### t0 für ua(t)=1/2 in us

- `delete t:tx:=op(numeric::solve(ua(t)=1/2,t=anf..maximum,RestrictedSearch),1):tx/1e-6;`  
15.580288462336022809616470370504

### die Einschwingzeit tau in us und die daraus resultierende Grenzfrequenz in kHz

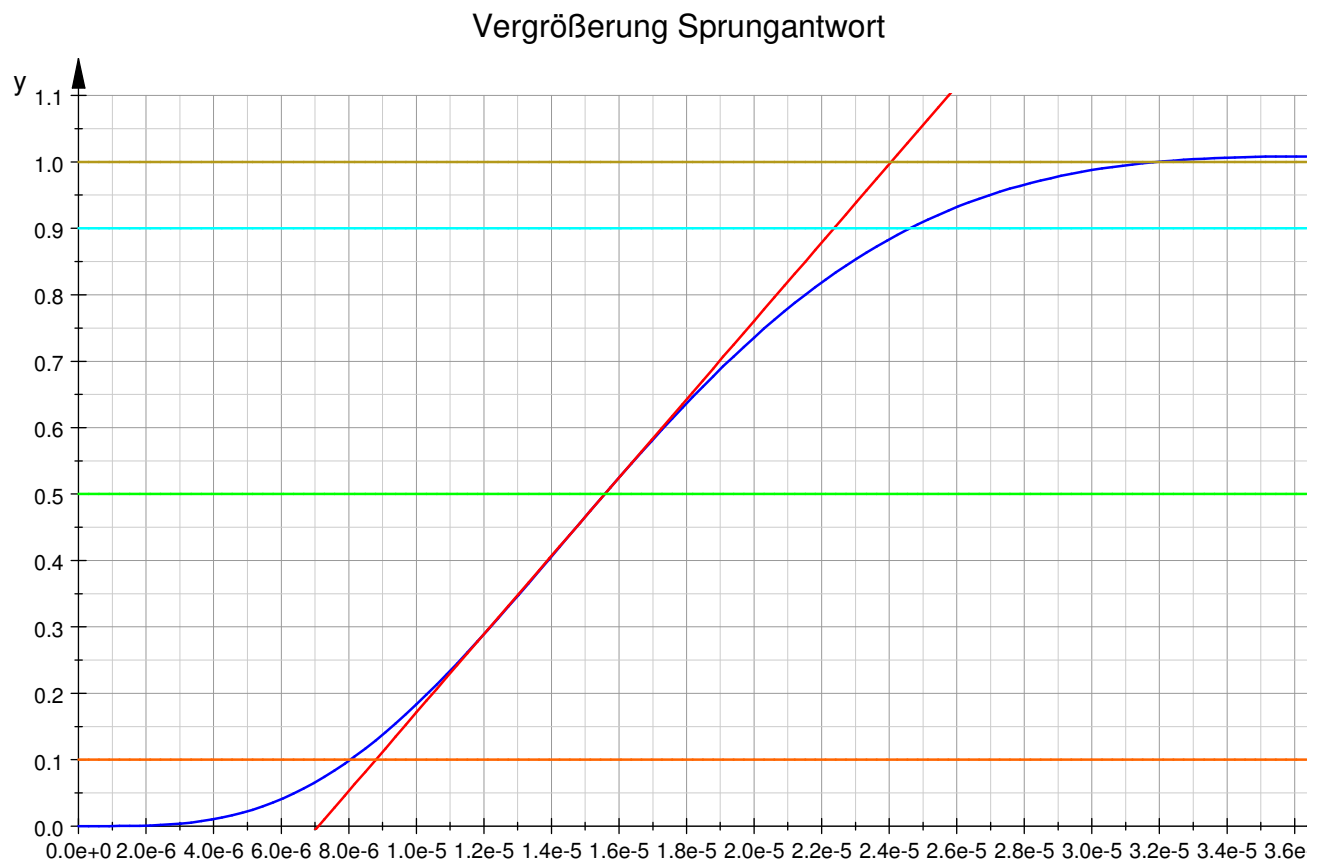
- `m:=ua'(t):t:=tx:m:=float(m):delete t:yt:=t->1/2-m*(tx-t);`
- `tau:=op(solve(yt(t)=1,t),1)-op(solve(yt(t)=0,t),1):tau/1e-6;float(1/2/PI/tau/1e3);`  
16.958092479942069624339684619802  
9.385191363954575121543481498692

tr, Rise-Time in us

- `tr:=op(numeric::solve(ua(t)=9/10,t=anf..ende, RestrictedSearch),1)-op(numeric::solve(ua(t)=1/10,t=anf..ende, RestrictedSearch),1):tr/1e-6;`

16.563084815194208343610079938117

- `plotfunc2d(ua(t), yt(t), 1/2, 1, 1/10, 9/10, t=0..maximum, LegendVisible=FALSE, CoordinateType=LinLin, GridVisible=TRUE, SubgridVisible=TRUE, Height=120*unit::mm, Width=180*unit::mm, Header="Vergrößerung Sprungantwort", YRange=0..1.1):`



Erregung des Filters mit  $L\{\sin(\omega_a(t-t_0))\} \rightarrow \omega_a e^{-(t-t_0)p} / (p^2 + \omega_a^2)$

- `wa:=2*PI*1e3:`

konj.-kompl. Polstellen

- `PS:=float(solve((p^2+wa^2/wg^2)*prodp=0,p));`

`{- 181974.27906138695427321557335152 -  
54489.927368059610606500644544221 I`

,

`- 181974.27906138695427321557335152 +  
54489.927368059610606500644544221 I`



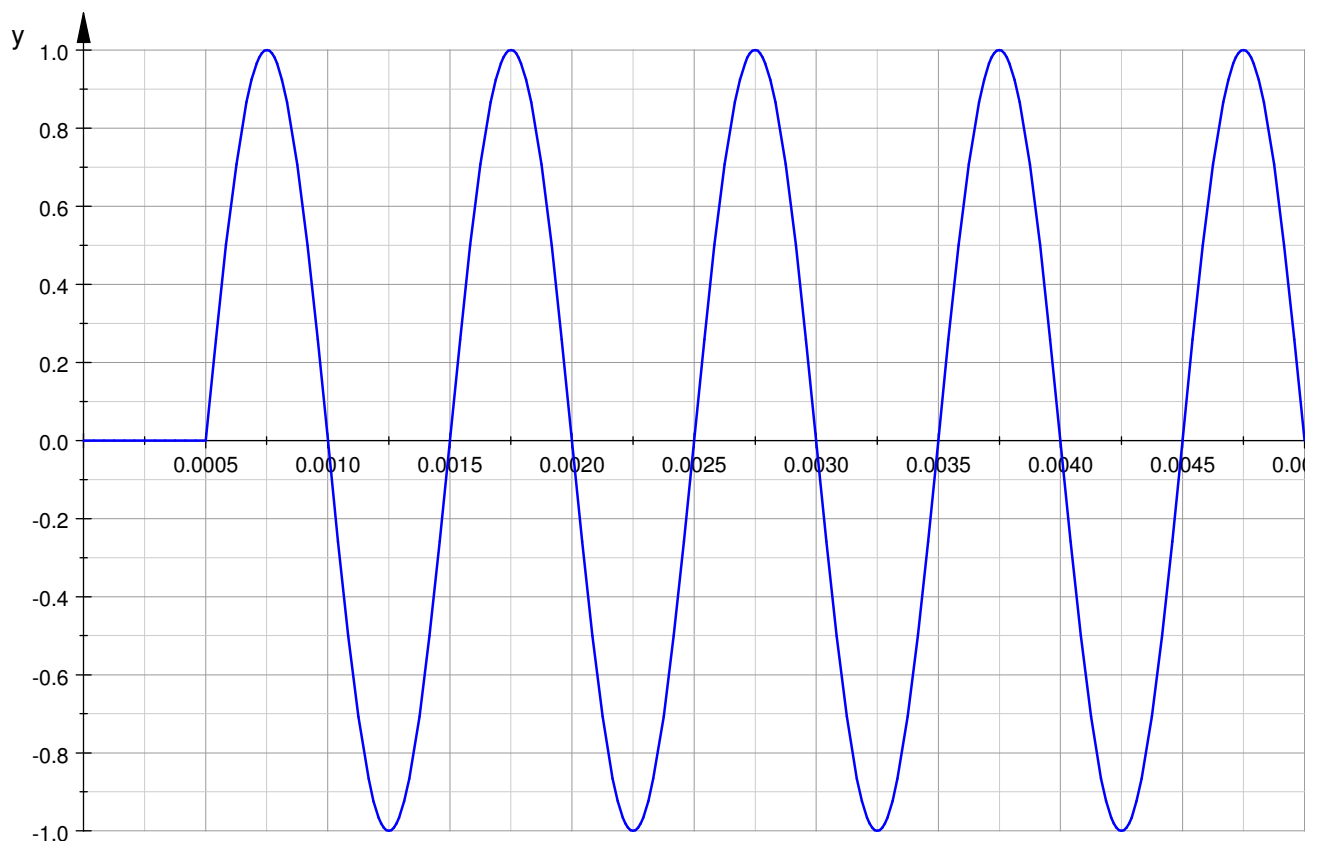
```

, -0.1 I, 0.1 I,
- 132184.98629759236957304876497643 -
166970.49995628296013151289075366 I
,
- 132184.98629759236957304876497643 +
166970.49995628296013151289075366 I
}

```

- `lap:=_mult(p/wg-op(PS,i) $ i=1..nops(PS)):`
- `ua:=(t)-->b0/(1+1/ue2)*2*wg^2*Re(transform::invlaplace(wa*exp(-0.0005*p)/lap,p,t)):`
- `plotfunc2d(ua(t), t=0..0.005, LegendVisible=FALSE, CoordinateType=LinLin, GridVisible=TRUE, SubgridVisible=TRUE, Height=120*unit::mm, Width=180*unit::mm, Header="Antwort des Filters auf sin(wa*(t-t0))"):`

Antwort des Filters auf  $\sin(\omega_a(t-t_0))$

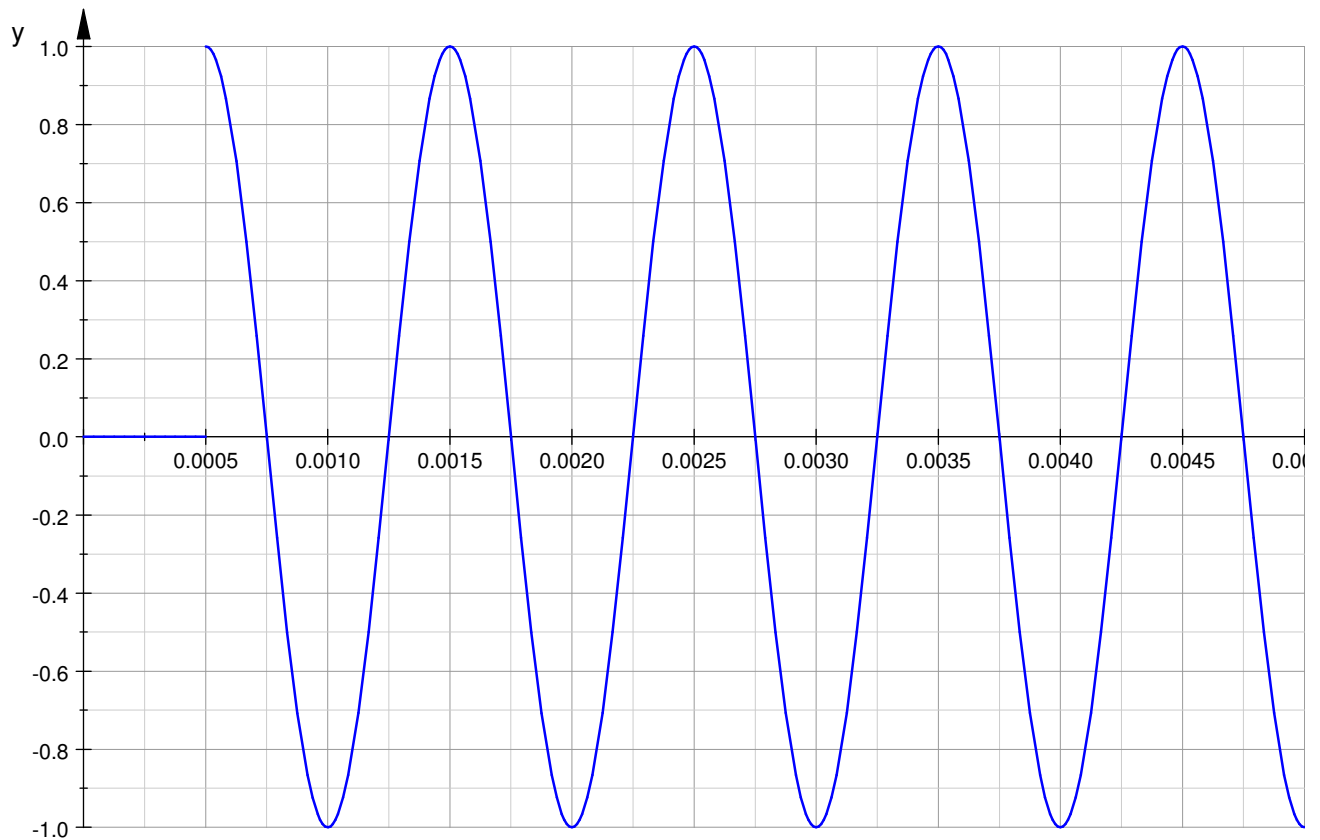


Erregung des Filters mit  $L\{\cos(\omega_a(t-t_0))\} \rightarrow p \cdot e^{(-t_0 \cdot p)} / (p^2 + \omega_a^2)$

- `ua:=(t)-->b0/(1+1/ue2)*2*wg^2*Re(transform::invlaplace(p*exp(-0.0005*p)/lap,p,t)):`
- `plotfunc2d(ua(t), t=0..0.005, LegendVisible=FALSE, CoordinateType=LinLin, GridVisible=TRUE, SubgridVisible=TRUE,`

Height=120\*unit::mm, Width=180\*unit::mm, Header="Antwort des Filters auf cos(wa\*(t-t0))":

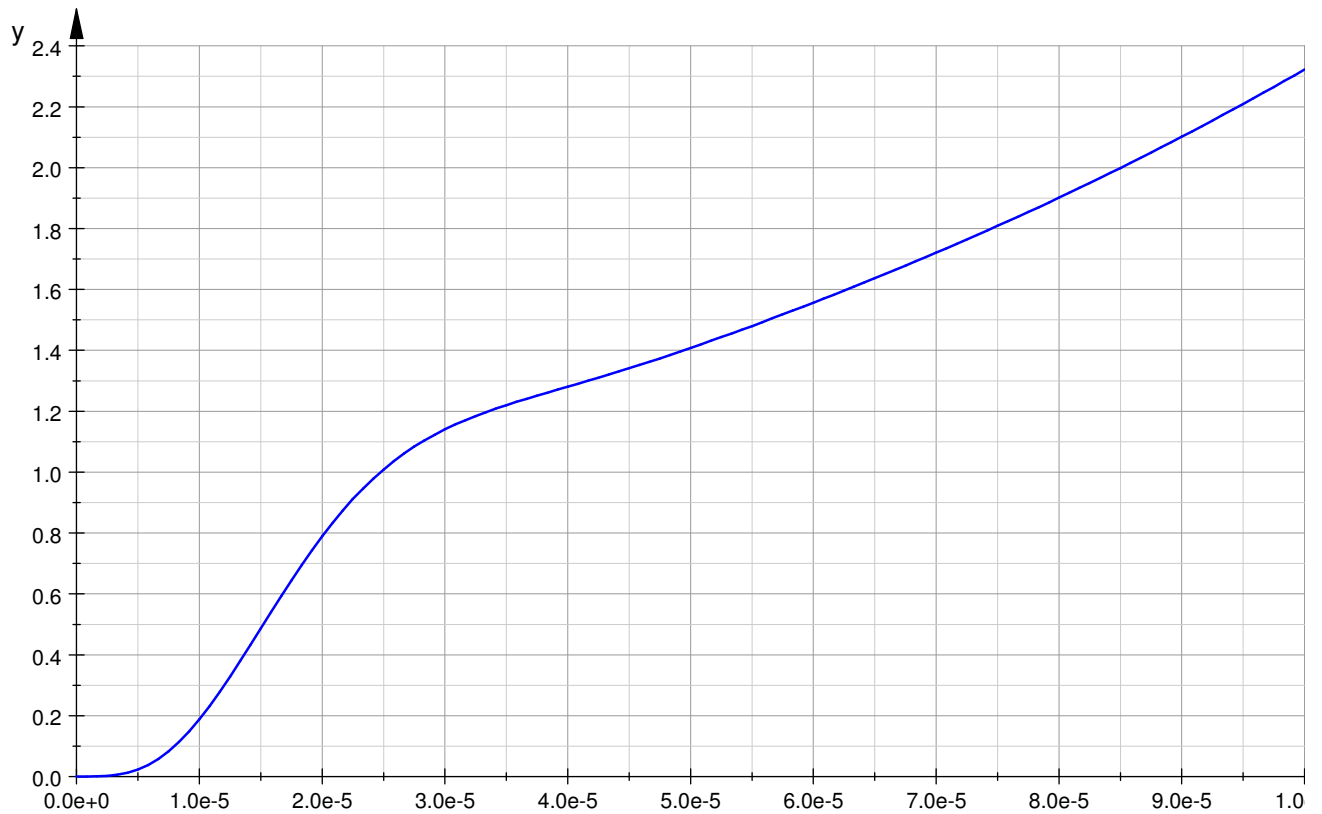
Antwort des Filters auf cos(wa\*(t-t0))



Erregung des Filters mit  $L\{e^{-a*t}\} \rightarrow 1/(p+a)$ ,  $a=-10000$

- `a:=-10000:`
- `ua:=(t)-`  
`>Re(transform::invlaplace(b0/(1+1/ue2)*2/(p+a)/prodp,p,t)):`
- `plotfunc2d(ua(t), t=0..1/fg, LegendVisible=FALSE,`  
`CoordinateType=LinLin,`  
`GridVisible=TRUE, SubgridVisible=TRUE,`  
`Height=120*unit::mm, Width=180*unit::mm, Header="Antwort des`  
`Filters auf exp(-a*t), a=-10000", YRange=0..2.4):`

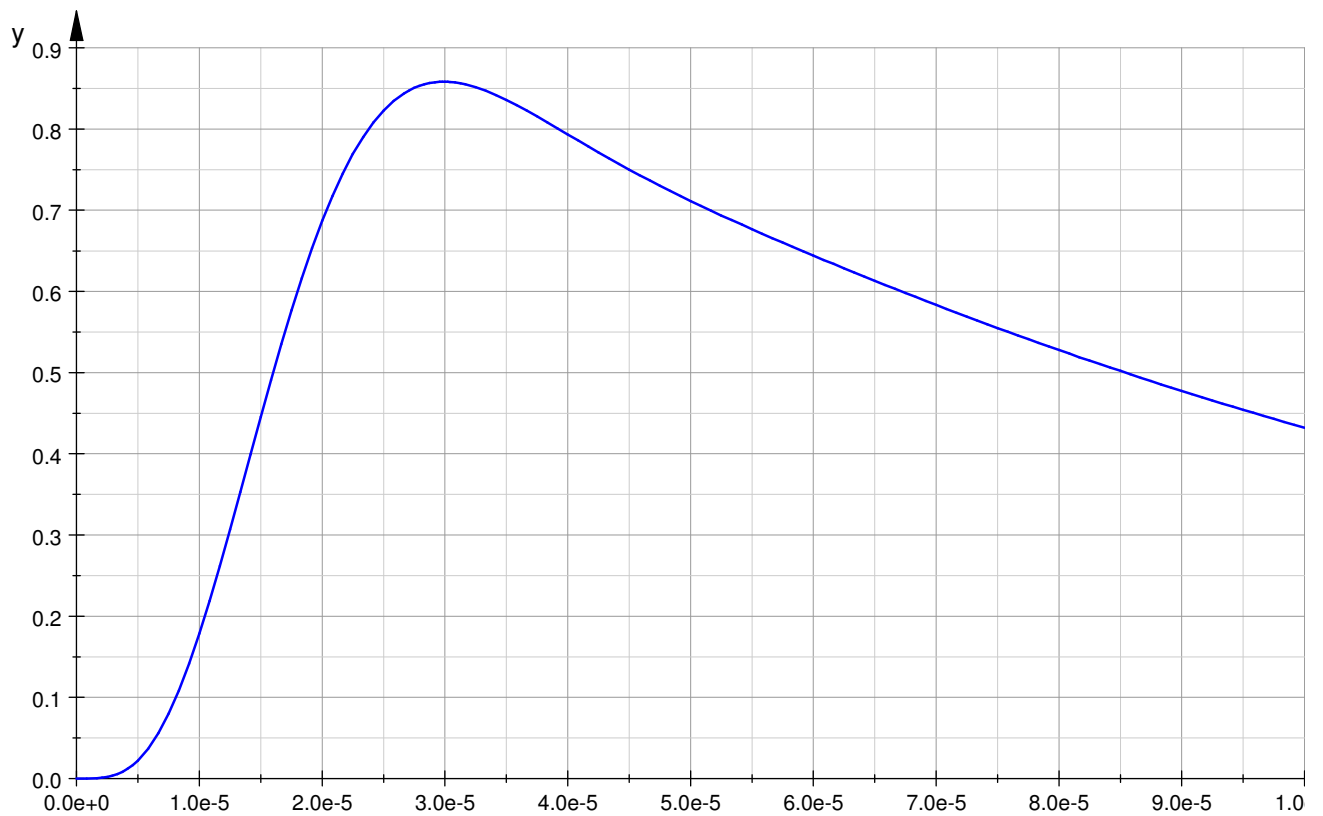
### Antwort des Filters auf $\exp(-a*t)$ , $a=-10000$



Erregung des Filters mit  $L\{e^{-a*t}\} \rightarrow 1/(p+a)$ ,  $a=10000$

- $a:=10000$ :
- $ua:=(t)-$   
>Re(transform::invlaplace(b0/(1+1/ue2)\*2/(p+a)/prodp,p,t)):
- plotfunc2d(ua(t), t=0..1/fg, LegendVisible=FALSE,  
CoordinateType=LinLin,  
GridVisible=TRUE, SubgridVisible=TRUE,  
Height=120\*unit::mm, Width=180\*unit::mm, Header="Antwort des  
Filters auf  $\exp(-a*t)$ ,  $a=10000$ ", YRange=0..0.9):

### Antwort des Filters auf $\exp(-a*t)$ , $a=10000$



Antwort des Filters  $L\{u(t)\} = \frac{1}{p} (1 - 2 \exp(-6.25e-5 \cdot p) + \exp(-12.5e-5 \cdot p))$

- `ua := (t) -> b0 / (1 + 1/ue2) * 2 * Re (transform::invlaplace (1/p/prodp - 2/p*exp(-6.25e-5*p)/prodp + 1/p*exp(-12.5e-5*p)/prodp, p, t)) :`
- `plotfunc2d(ua(t), t=0..1.7e-4, LegendVisible=FALSE, CoordinateType=LinLin, GridVisible=TRUE, SubgridVisible=TRUE, Height=120*unit::mm, Width=180*unit::mm, Header="Antwort auf eine 8 kHz-Rechteckschwingung", YRange=-1.1..1.1) :`

