Die Anpassung erdsymmetrischer und erdunsymmetrischer Systeme mit Boucherot-Brückenschaltung

Mit 6 Bildern

Von **T. Győry**, Budapest

Unter Anpassung verstehen wir die Verbindung eines Zweipolgenerators mit einer Innenimpedanz Z_g und eines Zweipolverbrauchers mit einer Impedanz Z_v derart, daß dem Verbraucher eine Maximalleistung übergeben wird. Im Falle eines Generators mit Ohmschem Innenwiderstand und eines Ohmschen Verbrauchers tritt dieser Fall dann ein, wenn der Belastungswiderstand dem Innenwiderstand des Generators gleich ist. Im Falle komplexer Impedanzen sprechen wir von Anpassung auf größte Wirk- und größte Scheinleistung. Für die Fernmeldetechnik ist die Anpassung zwischen einem Generator mit Ohmschem Innenwiderstand und einem Ohmschen Verbraucher von größter Bedeutung, weshalb wir uns im weiteren nur mit der Anpassung von Ohmschen Zweipolen befassen werden.

Wir nennen einen Zweipol erdsymmetrisch, wenn an den beiden Ausgangsklemmen in bezug auf Erde Spannungen von gleicher Größe, jedoch von entgegengesetzter Phase vorhanden sind. Wenn an der einen Klemme in bezug auf Erde eine Null-Spannung und an der anderen eine in bezug auf Erde beliebige Spannung auftritt, sprechen wir von einem erdunsymmetrischen Zweipol.

Zur Anpassung von einem erdsymmetrischen (erdunsymmetrischen) Generator mit gegebenem Innenwiderstand R_g und einem gegebenen erdunsymmetrischen (erdsymmetrischen) Widerstand R_v gebraucht man gewöhnlich Übertrager, an welche die Forderung gestellt wird, daß ihre Primärimpedanz dem Innenwiderstand des Generators, ihre Sekundärimpedanz dem Belastungswiderstand gleich sein soll.

In der Radiotechnik erfolgt die Anpassung üblicherweise für eine gegebene Frequenz, die Trägerfrequenz. Die Energieübertragung kann in diesem Falle zwischen erdsymmetrischen und erdunsymmetrischen Systemen, mit Anpassung, auch mittels *Boucherot*-Brückenschaltung verwirklicht werden. Bild 1 zeigt die prinzipielle Schaltung der Brücke mit den anzupassenden Widerständen R_1 und R_2. In Bild 1 ist R_1 als erdsymmetrisch und R_2 als erdunsymmetrisch vorausgesetzt. Es folgt aus dem Schaltungsprinzip, daß der Charakter der Widerstände R_1 und R_2 gegenseitig vertauschbar ist.

Im folgenden bringen wir die allgemeine Ableitung der *Boucherot*-Brücke unter der Annahme, daß es sich um einen erdsymmetrischen Generator mit einer Leerlaufspannung $2\mathfrak{U}$ und einem Innenwiderstand R_1 und einen erdunsymmetrischen Verbraucher mit einem Widerstand R_2 handelt. In Bild 2 haben wir den Generator in bezug auf den Nullpunkt, als Erde, symmetrisch in zwei Hälften geteilt. Die Reaktanzen in den Brückenzweigen seien $\mathrm{j}X_1$, $\mathrm{j}X_2$, $\mathrm{j}X_3$ und $\mathrm{j}X_4$. Die Fragen lauten: 1. Wie müssen die Werte der Reaktanzen in den Brückenzweigen gewählt werden, damit die Erdsymmetrie

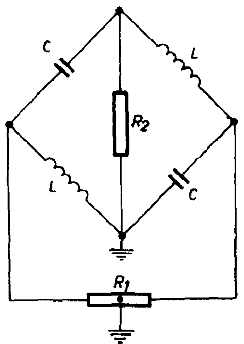

Bild 1. *Boucherot*-Brücke

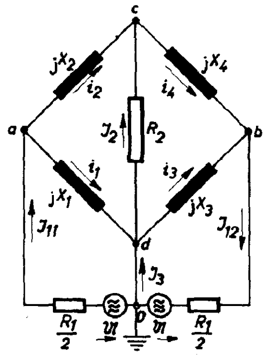

Bild 2. Anpassung eines erdsymmetrischen Generators an einen erdunsymmetrischen Widerstand mittels *Boucherot*-Brücke

des Generators nicht zerstört wird und auch der Anpassung Genüge geleistet wird? 2. Welches ist die Frequenz, welche zu Reaktanzen unter 1. gehört? 3. Wie groß ist der durch den Widerstand R_2 fließende Strom als Funktion der Frequenz und der anzupassenden Widerstände? 4. Wie groß sind die in den Brückenzweigen fließenden Ströme und Leistungen? 5. Wie müssen die Werte der Reaktanzen in den Brückenzweigen für andere Trägerfrequenzen geändert werden?

Setzen wir die Widerstände R_1 und R_2 als rein Ohmisch und die Reaktanzen in den Brückenzweigen als verlustlos voraus, so ist die an den Brückenpunkten a und b zugeführte Wirkleistung gleich der zwischen den Punkten c und d abgenommenen Leistung. Da dieser Idealfall in der Praxis nicht besteht, müssen wir mit einem gewissen Leistungsverlust rechnen. Wir haben auch die Streukapazitäten vernachlässigt, welche bei der praktischen Ausführung auf einem niedrigen Wert gehalten und — falls notwendig — kompensiert werden sollen.

1. Bestimmung der Reaktanzen in den Brückenzweigen

Für die Schaltung Bild 2 gilt, mit den eingezeichneten Strömen unter Benutzung der Richtungspfeile, das folgende Gleichungssystem:

$$\left.\begin{array}{l}
\mathrm{j}X_1\mathfrak{i}_1 + \frac{R_1}{2}\mathfrak{I}_{11} = \mathfrak{U} \\
\mathrm{j}X_3\mathfrak{i}_3 + \frac{R_1}{2}\mathfrak{I}_{12} = \mathfrak{U} \\
-\mathrm{j}X_1\mathfrak{i}_1 + \mathrm{j}X_2\mathfrak{i}_2 - R_2\mathfrak{I}_2 = 0 \\
-\mathrm{j}X_3\mathfrak{i}_3 + \mathrm{j}X_4\mathfrak{i}_4 + R_2\mathfrak{I}_2 = 0 \\
\mathfrak{i}_1 + \mathfrak{i}_2 - \mathfrak{I}_{11} = 0 \\
\mathfrak{i}_3 + \mathfrak{i}_4 - \mathfrak{I}_{12} = 0 \\
\mathfrak{i}_2 - \mathfrak{i}_4 + \mathfrak{I}_2 = 0 \\
\mathfrak{i}_1 - \mathfrak{i}_3 - \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{I}_3 = 0
\end{array}\right\} \qquad (1)$$

Die Symmetrie des Generators besteht, solange $\mathfrak{I}_{11} = \mathfrak{I}_{12} = \mathfrak{I}_1$, d. h. $\mathfrak{I}_3 = 0$ ist. (Die Richtigkeit dieser Behauptung ist aus dem *Kirchhoff*schen Gesetz für den Punkt 0 unmittelbar ersichtlich.) Die Gleichung $\mathfrak{I}_{11} = \mathfrak{I}_{12}$ wird in Determinantenform folgendermaßen dargestellt:

$$\frac{\begin{vmatrix} jX_1 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{U} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & jX_3 & 0 & \mathfrak{U} & \frac{R_1}{2} & 0 & 0 \\ -jX_1 & jX_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_2 & 0 \\ 0 & 0 & -jX_3 & jX_4 & 0 & 0 & R_2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} jX_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{R_1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & jX_3 & 0 & 0 & \frac{R_1}{2} & 0 & 0 \\ -jX_1 & jX_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_2 & 0 \\ 0 & 0 & -jX_3 & jX_4 & 0 & 0 & R_2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} jX_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{R_1}{2} & \mathfrak{U} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & jX_3 & 0 & 0 & \mathfrak{U} & 0 & 0 \\ -jX_1 & jX_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_2 & 0 \\ 0 & 0 & -jX_3 & jX_4 & 0 & 0 & R_2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} jX_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{R_1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & jX_3 & 0 & 0 & \frac{R_1}{2} & 0 & 0 \\ -jX_1 & jX_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_2 & 0 \\ 0 & 0 & -jX_3 & jX_4 & 0 & 0 & R_2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}. \qquad (2)$$

Da die Nenner der beiden Determinanten gleich sind, müssen auch die Zähler gleich sein. Aus der Gleichsetzung derselben ergibt sich:

$$R_2 X_3 (X_2 + X_4) + j\,X_3 X_4 (X_1 + X_2) = R_2 X_1 (X_2 + X_4) + j\,X_1 X_2 (X_3 + X_4). \qquad (3)$$

Zerlegen wir Gl. (3) in die reellen und die imaginären Teile, so erhalten wir die beiden Lösungen:

$$X_3 = X_1, \qquad X_1 = 0, \quad X_2 = X_4, \qquad (4\text{a})$$

$$X_4 = -X_2, \qquad X_2 = 0, \quad X_3 = \frac{X_1 X_2}{2\,X_1 + X_2}. \qquad (4\text{b})$$

Davon kommen für die Energieübertragung nur die Lösungen

$$X_4 = -X_2 \quad \text{und} \quad X_3 = \frac{X_1 X_2}{2\,X_1 + X_2} \qquad (4\text{c})$$

in Frage, da $X_1 = 0$ und $X_2 = 0$ einem Kurzschluß-Stromkreis und $X_1 = X_3$ und $X_2 = X_4$ einer Gleichgewichtsbrücke entsprechen.

Wenn wir den aus dem Gleichungssystem (1) zu berechnenden Strom $\mathfrak{I}_3$ gleich 0 setzen, erhalten wir folgende Gleichung:

$$R_2 [(X_1 - X_3)(X_2 + X_4)] + j[X_1 X_3 (X_2 - X_4) + X_2 X_4 (X_1 - X_3)] = 0. \qquad (5)$$

Es ist unmittelbar zu ersehen, daß Gl. (5) mit Gl. (3) identisch ist.

Zur Bestimmung der Reaktanzen sind weitere zwei Gleichungen notwendig, die aus der Anpassungsbedingung gewonnen werden. Bild 3 stellt einen Generator mit einer Leerlaufspannung $\mathfrak{U}$ und einem Innenwiderstand $\frac{R_1}{2}$ dar. Laut dem zur Einleitung Gesagten muß der Generator im Falle der Anpassung mit einem Widerstand $\frac{R_1}{2}$ abgeschlossen werden. Der dabei fließende Strom ist:

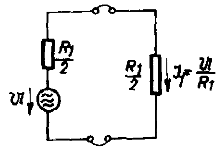

Bild 3. Anpassung von Generator und Verbraucher

$$I_1 = \frac{\mathfrak{U}}{R_1}. \qquad (6)$$

In unserem Fall entspricht $\mathfrak{U}$ der halben Leerlaufspannung, $\frac{R_1}{2}$ dem halben Innenwiderstand des die Brücke speisenden symmetrischen Generators und $\mathfrak{I}_1$ dem durch denselben gelieferten Strom $\mathfrak{I}_{11} = \mathfrak{I}_{12}$. Wenn wir in der Beziehung (6) $\mathfrak{I}_1$ durch den Ausdruck auf der linken Seite der Gl. (2) ersetzen, und zwar mit Rücksicht auf die Werte von X_3 und X_4 von der Gl. (4 c), so wird der Anpassungszustand durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$R_1^2 (X_1 + X_2)^2 + 4\,X_1^2 (X_2^2 - R_1 R_2) + j\,8\,R_1^2 R_2 X_1 (X_1 + X_2) = 0. \qquad (7)$$

Da — laut unserer Voraussetzung — R_1 und R_2 nicht gleich 0 sind, führt die Trennung der reellen und der imaginären Teile der Gl. (7) zum folgenden Gleichungssystem:

$$R_1^2 (X_1 + X_2)^2 + 4\,X_1^2 (X_2^2 - R_1 R_2) = 0, \qquad (7\text{a})$$

$$X_1 (X_1 + X_2) = 0. \qquad (7\text{b})$$

Die zusammengehörigen Lösungen der Gln. (7 a) und (7 b) sind:

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0; \qquad (8\text{a})$$

$$X_2 = -X_1, \qquad X_1 = 0, \quad X_1 = \pm\sqrt{R_1 R_2}. \qquad (8\text{b})$$

In Anbetracht der Energieübertragung können nur die Lösungen

$$X_2 = -X_1 \quad \text{und} \quad X_1 = \pm\sqrt{R_1 R_2} \qquad (8\text{c})$$

in Frage kommen. Die beiden Vorzeichen der Wurzel in der Gleichung von X_1 lassen darauf schließen, daß die Reaktanzen in den Brückenzweigen zyklisch vertauschbar sind. Im folgenden ziehen wir das positive Vorzeichen der Wurzel in Betracht. Mit X_1 ergeben sich, auf Grund der Zusammenhänge unter Gln. (8 c) und (4 c), die folgenden Reaktanzwerte in den Brückenzweigen:

$$j\,X_1 = j\sqrt{R_1 R_2}, \quad j\,X_2 = -j\,X_1, \quad j\,X_3 = -j\,X_1, \quad j\,X_4 = j\,X_1. \qquad (9)$$

2. Bestimmung der Anpassungsfrequenz

Nach den Zusammenhängen (9) bedeuten $\mathrm{j}\,X_1$ und $\mathrm{j}\,X_4$ rein induktive, $-\mathrm{j}\,X_2$ und $-\mathrm{j}\,X_3$ rein kapazitive Reaktanzen, welche in bezug auf ihren absoluten Wert gleich, in bezug auf das Vorzeichen jedoch verschieden sind. Wenn wir die Kreisfrequenz, bei welcher diese Bedingung erfüllt wird, mit ω_0 bezeichnen, so kann auf Grund der Gleichheit der absoluten Werte geschrieben werden:

$$|X_1| = |X_2| = \sqrt{R_1 R_2}, \text{ d. h. } \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}, \tag{10}$$

woraus sich ergibt:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{L C}}. \tag{11}$$

Die Anpassungfrequenz f_0 ist folglich die Resonanzfrequenz der Brücke. Der Wellenwiderstand der Brücke ergibt sich als geometrischer Mittelwert der Leerlauf- und Kurzschlußimpedanzen:

$$\mathfrak{Z}_0 = \sqrt{\mathfrak{Z}_l \cdot \mathfrak{Z}_k}. \tag{12}$$

Die auf der Resonanzfrequenz umgerechneten Werte von $\mathfrak{Z}_l$ und $\mathfrak{Z}_k$ sind:

$$\mathfrak{Z}_l = \mathrm{j}\,\frac{1}{2}\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right), \tag{13a}$$

$$\mathfrak{Z}_k = 2\,\frac{\mathrm{j}\,\omega_0 L \,\dfrac{1}{\mathrm{j}\,\omega_0 C}}{\mathrm{j}\left(\omega_0 L - \dfrac{1}{\omega_0 C}\right)}. \tag{13b}$$

Wenn man die Werte von $\mathfrak{Z}_l$ und $\mathfrak{Z}_k$ laut Gl. (13 a) und (13 b) in den Zusammenhang (12) einsetzt, ergibt sich nach Vereinfachung als Wellenwiderstand der Brücke:

$$\mathfrak{Z}_0 = Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{R_1 R_2}. \tag{14}$$

3. Der durch die Belastung R_2 fließende Strom

Der durch die Belastung R_2 fließende Strom kann aus dem Gleichungssystem (1) durch Auflösung nach $\mathfrak{J}_2$ bestimmt werden:

$$\mathfrak{J}_2 = \frac{\begin{vmatrix} \mathrm{j}\,X_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{R_1}{2} & 0 & \mathfrak{U} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{j}\,X_3 & 0 & 0 & \frac{R_1}{2} & \mathfrak{U} & 0 \\ -\mathrm{j}\,X_1 & \mathrm{j}\,X_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{j}\,X_3 & \mathrm{j}\,X_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{j}\,X_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{R_1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{j}\,X_3 & 0 & 0 & \frac{R_1}{2} & 0 & 0 \\ -\mathrm{j}\,X_1 & \mathrm{j}\,X_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{j}\,X_3 & \mathrm{j}\,X_4 & 0 & 0 & R_2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}, \tag{15a}$$

wobei die Abkürzungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{U}\left[\frac{R_1}{2} X_2 X_3 + \mathrm{j}\,(X_2 - X_4)\,X_1 X_3 - \frac{R_1}{2} X_1 X_4\right],$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{B} = {} & \frac{R_1^2}{4}\,[(X_1 + X_2)\,(X_3 + X_4)] \\ & + \frac{R_1 R_2}{2}(X_1 + X_3)(X_2 + X_4) + X_1 X_3\,(R_1 R_2 - X_2 X_4) \\ & - \mathrm{j}\left(\frac{R_1 R_2}{4}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \right. \\ & \quad - \frac{R_1}{2}\,[X_2 X_3\,(X_1 + X_4) + X_1 X_4\,(X_2 + X_3)] \\ & \quad \left. - R_2 X_1 X_3\,(X_2 + X_4)\right). \end{aligned} \tag{15b}$$

Die Gln. (15) können unter Berücksichtigung der folgenden Zusammenhänge mit der variablen Kreisfrequenz ω umgeändert werden:

$$X_1 = \omega L, \quad X_2 = -\frac{1}{\omega C}, \quad X_3 = -\frac{1}{\omega C}, \quad X_4 = \omega L.$$

$$\omega L + \frac{1}{\omega C} = \omega_0 L\left(\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega}\right); \quad \omega L - \frac{1}{\omega C} = \omega_0 L\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right).$$

$$\frac{L}{C} = R_1 R_2; \quad \omega_0 L = \sqrt{R_1 R_2}, \quad \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{R_1 R_2}; \quad \gamma = \frac{\omega}{\omega_0}. \tag{16}$$

Nach der Vereinfachung beträgt der durch die Belastung R_2 fließende Strom:

$$\mathfrak{J}_2 = -\mathfrak{U}\,\frac{\gamma + \dfrac{1}{\gamma}}{\left(\gamma - \dfrac{1}{\gamma}\right)\left(\dfrac{R_1}{2} + R_2\right) - \mathrm{j}\,2\sqrt{R_1 R_2}}. \tag{17}$$

Den auf der Anpassungsfrequenz (Resonanzfrequenz) f_0 auftretenden Strom $\mathfrak{J}_{20}$ erhalten wir durch die Einsetzung $\gamma = 1$:

$$\mathfrak{J}_{20} = -\mathrm{j}\,\frac{\mathfrak{U}}{\sqrt{R_1 R_2}}. \tag{18}$$

Das Verhältnis zwischen den Verbrauchsströmen, bei den Frequenzen f und f_0 ist:

$$\frac{\mathfrak{J}_2}{\mathfrak{J}_{20}} = \frac{2 R_1 R_2\left(\gamma + \dfrac{1}{\gamma}\right) - \mathrm{j}\sqrt{R_1 R_2}\left(\dfrac{R_1}{2} + R_2\right)\left(\gamma^2 - \dfrac{1}{\gamma^2}\right)}{\left(\gamma - \dfrac{1}{\gamma}\right)^2\left(\dfrac{R_1}{2} + R_2\right)^2 + 4 R_1 R_2}. \tag{19}$$

Der absolute Wert des Quotienten (19) beträgt:

$$\frac{|\mathfrak{J}_2|}{|\mathfrak{J}_{20}|} = \frac{\gamma + \dfrac{1}{\gamma}}{\sqrt{4 + \left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{R_1}{R_2}} + \sqrt{\dfrac{R_2}{R_1}}\right)^2\left(\gamma - \dfrac{1}{\gamma}\right)^2}}. \tag{20}$$

Die Phase des Quotienten (19) ist:

$$\operatorname{arc}\frac{\mathfrak{J}_2}{\mathfrak{J}_{20}} = \operatorname{arc\,tg}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} + \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\right)\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)\right]. \tag{21}$$

Wir erhalten einen für den auf $\mathfrak{J}_{20}$ bezogenen Strom $\mathfrak{J}_2$ charakteristischen Wert, wenn wir den Wert des Zusammenhanges (20) für die Frequenzen $f = 0$ und $f \to \infty$ bestimmen:

$$\left(\frac{|\mathfrak{J}_2|}{|\mathfrak{J}_{20}|}\right)_{f=0} = \lim_{\gamma \to 0} \frac{\gamma + \dfrac{1}{\gamma}}{\sqrt{4 + \left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{R_1}{R_2}} + \sqrt{\dfrac{R_2}{R_1}}\right)^2\left(\gamma - \dfrac{1}{\gamma}\right)^2}} \to \frac{2\sqrt{\dfrac{R_1}{R_2}}}{\dfrac{R_1}{R_2} + 2} \ldots \tag{22a}$$

$$\left(\frac{|\mathfrak{J}_2|}{|\mathfrak{J}_{20}|}\right)_{f\to\infty} = \lim_{\gamma \to \infty} \frac{\gamma + \dfrac{1}{\gamma}}{\sqrt{4 + \left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{R_1}{R_2}} + \sqrt{\dfrac{R_2}{R_1}}\right)^2\left(\gamma - \dfrac{1}{\gamma}\right)^2}} \to \frac{2\sqrt{\dfrac{R_1}{R_2}}}{\dfrac{R_1}{R_2} + 2}. \tag{22b}$$

Die für die auf $\mathfrak{J}_{20}$ bezogene Größe des Sekundärstromes charakteristische Kurve ist folglich in bezug auf die Anpassungsfrequenz f_0 zwischen 0 und der Frequenz unendlich axial symmetrisch.

Diejenigen Widerstandsverhältnisse $\frac{R_1}{R_2}$ deren zugehörige Resonanzkurven identisch sind, können mit Berücksichtigung der Zusammenhänge unter Gln. (20) und (21) durch die Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} + \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} = \mathrm{const} \tag{23}$$

ermittelt werden.

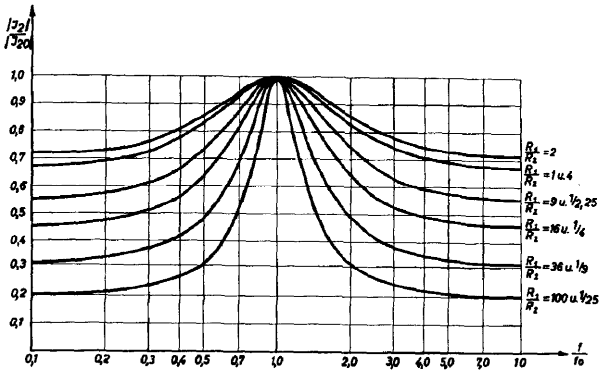

Bild 4 a. Betrag des auf $\mathfrak{I}_{20}$ bezogenen Sekundärstromes der *Boucherot*-Brücke als Funktion der relativen Frequenz bei verschiedenen Verhältnissen R_1/R_2

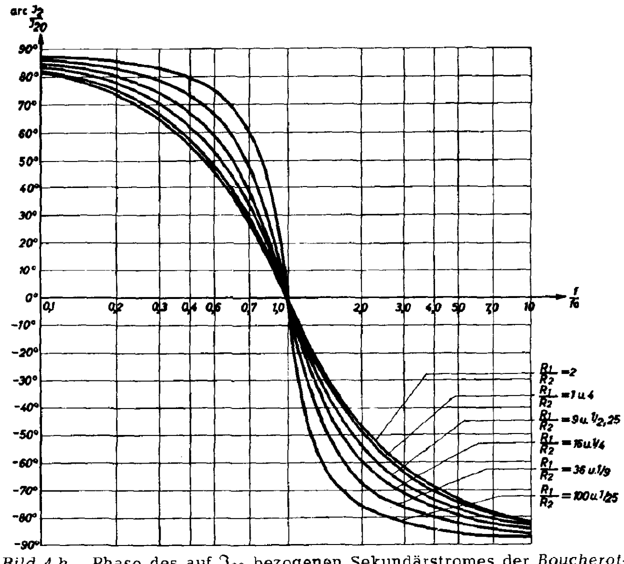

Bild 4 b. Phase des auf $\mathfrak{I}_{20}$ bezogenen Sekundärstromes der Boucherot-Brücke als Funktion der relativen Frequenz bei verschiedenen Verhältnissen R_1/R_2

Die flachste Resonanzkurve ergibt sich bei demjenigen Verhältnis $\frac{R_1}{R_2}$, bei welchem der Zusammenhang (20) als Funktion von $\frac{R_1}{R_2}$ einen Maximalwert zeigt. Statt des ganzen Ausdruckes genügt die Untersuchung der Funktion

$$\mathrm{f}\left(\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} + \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}. \tag{24}$$

Aus der ersten Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{f}\left(\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right)}{\mathrm{d}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{R_1}{R_2}} = 0 \tag{25a}$$

ergibt sich:

$$\frac{R_1}{R_2} = 2. \tag{25b}$$

Die zweite Ableitung nach $\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$ an der Stelle $\frac{R_1}{R_2} = 2$ ist größer als 0, die Funktion (24) hat folglich ein Minimum und die Funktion (20) ein Maximum.

Die Bilder 4 a und 4 b geben die Zusammenhänge (20) und (21) wieder.

In der Nähe des Resonanzpunktes ist es manchmal bequemer statt mit der γ-Funktion mit der Funktion $\frac{\Delta f}{f_0}$ zu rechnen, wobei Δf die Verstimmung vom Resonanzpunkt bedeutet. In der Nähe des Resonanzpunktes kann geschrieben werden:

$$\gamma - \frac{1}{\gamma} \approx 2\frac{\Delta f}{f_0}; \quad \left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)^2 \approx 4\left(\frac{\Delta f}{f_0}\right)^2; \quad \gamma + \frac{1}{\gamma} \approx 2. \tag{26}$$

Nimmt man Δf kleiner als 10 % von f_0, was in der Praxis im allgemeinen genügt, so liegt auch der Fehler der Gleichungen unter (26) innerhalb von 10 %.

Die Gln. (20) und (21) ändern sich mit $\frac{\Delta f}{f_0}$ in:

$$\frac{|\mathfrak{I}_2|}{|\mathfrak{I}_{20}|} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} + \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\right)^2 \left(\frac{\Delta f}{f_0}\right)^2}}, \tag{27}$$

$$\mathrm{arc}\,\frac{\mathfrak{I}_2}{\mathfrak{I}_{20}} \approx \mathrm{arc\,tg}\left[-\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} + \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\right)\left(\frac{\Delta f}{f_0}\right)\right]. \tag{28}$$

Auf Grund des oben Gesagten kann festgestellt werden, daß die erwünschte Bandbreite in den praktisch vorkommenden Fällen immer gesichert werden kann.

4. Die Berechnung der Reaktanzelemente der Brücke

Zur Berechnung müssen wir die auf der Anpassungsfrequenz in der Brücke fließenden Ströme und Leistungen kennen. Setzt man in das Gleichungssystem (1) statt $\mathrm{j}\,X_1$, $\mathrm{j}\,X_2$, $\mathrm{j}\,X_3$ und $\mathrm{j}\,X_4$ die Werte (9) ein, und löst man das Gleichungssystem, so erhält man für die bei der Anpassungsfrequenz in der Brücke fließenden Ströme:

$$\mathrm{i}_{10} = -\mathrm{j}\,\frac{\mathfrak{U}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}}, \qquad \mathrm{i}_{20} = \frac{\mathfrak{U}}{R_1}\left(1 + \mathrm{j}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right),$$

$$\mathrm{i}_{30} = \mathrm{j}\,\frac{\mathfrak{U}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}}, \qquad \mathrm{i}_{40} = \frac{\mathfrak{U}}{R_1}\left(1 - \mathrm{j}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right),$$

$$\mathfrak{I}_{11} = \mathfrak{I}_{12} = \mathfrak{I}_{10} = \frac{\mathfrak{U}}{R_1}; \qquad \mathfrak{I}_{20} = -\mathrm{j}\,\mathfrak{U}\,\frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}}; \qquad \mathfrak{I}_3 = 0. \tag{29}$$

Zur Berechnung der Reaktanzen in den Brückenzweigen bestimmen wir die Blindleistungen:

$$N_{1b} = |\mathrm{i}_{10}|^2 \cdot \sqrt{R_1 R_2} = \frac{\mathfrak{U}^2}{4\sqrt{R_1 R_2}},$$

$$N_{2b} = |\mathrm{i}_{20}|^2 \cdot \sqrt{R_1 R_2} = \frac{\mathfrak{U}^2}{R_1^2}\left(1 + \frac{1}{4}\frac{R_1}{R_2}\right)\sqrt{R_1 R_2},$$

$$N_{3b} = |\mathrm{i}_{30}|^2 \cdot \sqrt{R_1 R_2} = \frac{\mathfrak{U}^2}{4\sqrt{R_1 R_2}},$$

$$N_{4b} = |\mathrm{i}_{40}|^2 \cdot \sqrt{R_1 R_2} = \frac{\mathfrak{U}^2}{R_1^2}\left(1 + \frac{1}{4}\frac{R_1}{R_2}\right)\sqrt{R_1 R_2}. \tag{30}$$

5. Die Frequenzabhängigkeit der Reaktanzen in den Brückenzweigen

Vom Gesichtspunkt der Abstimmung der Brücke auf verschiedene Trägerfrequenzen aus gesehen, ist es nicht ohne Interesse, wenn wir im Falle gegebener Anpassungswiderstände R_1 und R_2 den Wert der Induktivitäten und der Kapazitäten als Funktion der Trägerfrequenz ausdrücken:

$$L = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{2\pi f_0}, \quad C = \frac{1}{2\pi f_0 \sqrt{R_1 R_2}}. \tag{31}$$

Die Werte L und C sind also der Frequenz umgekehrt proportional und können gleichzeitig abgestimmt werden.

Eine für Berechnungszwecke besser geeignete Formel der Gl. (31) lautet:

$$L^* = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{2\pi f_0^*}, \quad C^* = \frac{10^6}{2\pi f_0^* \sqrt{R_1 R_2}}, \tag{32}$$

wobei wir f_0^* in MHz, R_1 und R_2 in Ohm, L^* in μH und C^* in pF messen.

Die Anpassung durch Brückenschaltung kann auf allen Gebieten der Elektrotechnik verwendet werden, wo man auf einer gegebenen Trägerfrequenz erdsymmetrische und erdunsymmetrische Zweipole anpassen will. Diese Schaltung ist besonders in der Ultrakurzwellentechnik von Bedeutung, wo die von der Flachheit der Resonanzkurve herstammenden Vorteile gut ausgenützt werden können.

In Bild 5 haben wir die Brücke auch als Kreuzglied dargestellt. Ihren Eingangswiderstand haben wir mit R_1, die Klemmenspannungen an ihren Eingangspunkten mit $\mathfrak{U}$, ihren Ausgangswiderstand mit R_2 bezeichnet sowie die Ströme angeführt.

Bild 6 ist das Spannungsvektorbild der Brücke. Die Indizes der Spannungsvektoren geben, den in Bild 5 eingezeichneten Brüchen gemäß, den Sinn der Spannungsvektoren bei den gegebenen Stromrichtungen an:

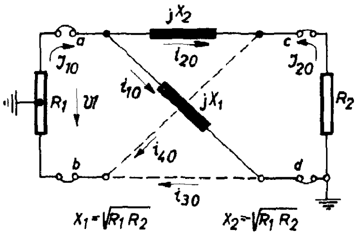

Bild 5

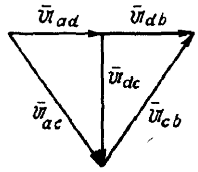

Bild 6

Bild 5. Kreuzglied mit Eingangswiderstand R_1 und Ausgangswiderstand R_2 zur Anpassung erdsymmetrischer und erdunsymmetrischer Systeme bei der Frequenz f_0

Bild 6. Vektorbild der Spannungssymmetrie

der erste Buchstabe entspricht dem Anfangspunkt, der zweite dem Endpunkt der Spannungsvektoren.

Schrifttumsverzeichnis

[1] *W. Buschbeck:* Die Entwicklung des transozeanischen Kurzwellen-Sendedienstes in Deutschland. Telefunken-Hausmitteilungen 20 (März 1939), S. 23.

[2] *F. E. Terman:* Radio Engineers' Handbook. McGraw-Hill Book Company, Inc., London 1943.

[3] *Liska* u. *Retter:* Váltakozó áramok elmélete, II. rész. (Theorie der Wechselströme, II. Teil). Tankönyvkiadó, Budapest 1955.

[4] *Cauer:* Siebschaltungen. VDI-Verlag GmbH, Berlin 1931.

[5] *Cauer:* Theorie der linearen Wechselstromschaltungen. Akademischer Verlag, Berlin 1954.

[6] *Feldtkeller:* Einführung in die Vierpoltheorie. Hirzel, Leipzig 1948.

(Eingeg.: 3. Dezember 1957)

Buchlese

Flugsicherungstechnik, I. Navigationsanlagen. Von *K. Bärner.* Die Bücher der Luftfahrtpraxis, Bd. 5, Hanns Reich Verlag, München 1957. 274 S., 239 B. Preis 16,10 DM.

Mit der Übernahme des Flugsicherungsdienstes in der Deutschen Bundesrepublik durch deutsche Behörden entstand schon 1953 Bedarf an Büchern über Aufbau und Wirkungsweise der zunächst eingeführten Flugsicherungsanlagen. Der vorliegende Band umfaßt an Sendeanlagen die verschiedenen Funkfeuer, Consol-Anlagen und VOR. Er gibt auch einen Ausblick auf Tacan und DME. Von Hyperbel-Navigation, Loran und ILS wird besonders das letzte Verfahren ausführlich behandelt. Die Behandlung der Empfangsanlagen erstreckt sich auf UKW-Peilung und die zu den obigen Sendern gehörigen Bordgeräte.

Kurzwellenpeilung und Radaranlagen sind einem späteren Band der Buchreihe vorbehalten.

Die einzelnen Geräte werden ausführlich beschrieben, so daß der mit der Flugsicherung befaßte Praktiker alle für ihn erforderlichen Hinweise erhält. Darüber hinaus bietet das Buch aber auch allen denen, die allgemein mit der Luftfahrt in Berührung stehen, und besonders dem Hochfrequenzingenieur viele aufschlußreiche Einblicke in eine Sondertechnik, die heute für den Luftverkehr von entscheidender Bedeutung ist. *E. Roessler*

Praktische Akustik; Die Physik in Einzelberichten, Heft 2. Hrsg. von *Carl Ramsauer* †, Schriftleitung *Ernst Brüche*, red. von *Werner Meyer-Eppler*. Physik-Verlag Johann Ambrosius Barth, München 1957; 68 Seiten, 7 Abbildungen, broschiert 14,40 DM.

Der Band enthält Beiträge von *H. Thiede* (Ultraschall), *W. Willms* (Akustische Meßtechnik), *F. A. Fischer* (Wandlertheorie und Analogien), *F. Enkel* und *H. Etzold* (Schallübertragung und Schallspeicherung), *L. Cremer* (Raum- und Bauakustik), *F. W. Kallmeyer* (Wasserschall, Schallortung), *W. Meyer-Eppler* (Physiologische und psychologische Akustik, Musik, Sprache), *H. Kietz* (Audiometrie und Hörhilfen). Mit einem umfassenden Literaturverzeichnis ausgestattet, gibt diese Schrift auf etwa 50 Seiten einen instruktiven Überblick über die wichtigsten Forschungsergebnisse der letzten 12 Jahre. Der Redaktion von *Meyer-Eppler* ist eine sehr geschlossene Anlage des Heftes zu verdanken, die jede Wiederholung meidet und sich auf das Wesentliche konzentriert. *Ungeheuer*

Die Fernmessung II. Fernmeßverfahren für beliebige Entfernungen und Übertragungskanäle. Von *S. John.* Verlag G. Braun, Karlsruhe 1957. 222 S., 112 Bilder. Preis 32,— DM.

Das Kernproblem aller Verfahren und Anlagen der Fernmeßtechnik steckt in der Wandlung langsam und stetig veränderlicher Meßgrößen in diskrete Frequenzen oder Impulse, die dem Meßwert entsprechen und sich zur Übertragung auf Fernmeldeleitungen eignen.

Der Verfasser stellt die in der Fachliteratur verstreuten Verfahren und Geräte des Fernmeßwesens zusammen und ordnet sie nach dem verwendeten Arbeitsprinzip. Sendegeräte, Empfangsgeräte und deren Funktionen werden bis ins einzelne beschrieben. Die Vor- und Nachteile der einzelnen Verfahren werden abgeschätzt. Theoretische Untersuchungen sind vermieden.

Im ersten Kapitel wird das Impulszahlverfahren behandelt, bei dem jeder übertragene Impuls einer Meßwertänderung entspricht. Die folgenden Abschnitte enthalten dann die eigentlichen Impulsverfahren, bei denen die Impulsfrequenz, die Impulsdauer oder die Phasenlage der Impulse ein Maß für die Größe des zu übertragenden Meßwertes ist.

Das Werk eignet sich in erster Linie für den Praktiker und Betriebsingenieur, ist aber auch als Nachschlagewerk geeignet. *Gillert*

Fern- und Summenfernzählung. Von *F. Kuhn.* Verlag G. Braun, Karlsruhe 1957. 216 S., 112 Bilder. Preis 32,— DM.

Die Festsetzung eines angemessenen Preises für elektrische Energie stellte die Meßtechniker mit dem Anwachsen der Energieversorgungsunternehmungen (EVU) vor immer größere Aufgaben. Im Interesse der Wirtschaftlichkeit sollten die Kraftwerke möglichst voll und gleichmäßig belastet werden. So entwickelte sich im Laufe der Jahrzehnte das heute recht umfangreiche Gebiet der Fern- und Summenfernzählung, das auch auf anderen Gebieten der Technik verwendet wird (z. B. beim Erfassen von Durchflußmengen in Rohrleitungen und bei Verkehrsmessungen in den Wählvermittlungsstellen der Deutschen Bundespost).

Der Verfasser gibt in dem vorliegenden Buch einen ausgezeichneten, erschöpfenden Überblick über das gesamte Gebiet der Fern- und Summenfernzählung. Er faßt nicht nur die in der Literatur verstreuten Aufsätze über Teilgebiete zusammen, sondern verarbeitet sie zu einem harmonischen Ganzen, dem er ein reiches Maß eigener Erfahrung hinzufügt. *Gillert*