Bestimmung der Lage der Polstellen bei der Erweiterung von TSCHEBYSCHEFF-Tiefpässen zu CAUER-Tiefpässen

Dipl.-Ing. Leo Baumann

Datum 25. Mai 2007

Inhalt

1.0 Einleitung

Eines der mehreren Verfahren um zu einem CAUER-Tiefpass zu gelangen, ist das Hinzufügen von Polstellen zu einem üblichen TSCHEBYSCHEFF-Tiefpass. Als eine Alternative gilt auch ein JACOBI-Tiefpass, der einen sehr ähnlichen Verlauf des Betrages der Übertragungsfunktion aufweist. Hier wird ein Verfahren genannt das den Verlauf des zugrunde liegenden Filters im Durchlassbereich möglichst wenig verändert.

2.0 Synthese des CAUER-Tiefpasses

Analysiert man den Verlauf des Betrages der Übertragungsfunktion von CAUER-Tiefpässen aus Tabellen in der Literatur kommt man zu sehr unterschiedlichen Ergebnissen. Auffällig werden insbesondere starke Überhöhungen in der Umgebung von F = ω/ω_g = 1, die teilweise 12 dB überschreiten und den praktischen Gebrauch des Filters in Frage stellen. Wer möchte schon im Durchlassbereich eines Tiefpasses 12 dB-Schwankungen haben? Gemacht werden derartige Filtersynthesen wohl um den Übergang vom Durchlass- in den Sperrbereich möglichst steil zu gestalten.

Vorgeschlagen werden soll folgendes Syntheseverfahren für CAUER-Tiefpässe, um ein maximal flaches Verhalten im Durchlassbereich zu erzielen, oder anders ausgedrückt, das Verhalten im Durchlassbereich des zugrunde liegenden Filters, TSCHEBYSCHEFF oder JACOBI, soll möglichst wenig verschlechtert werden.

Legt man einen TSCHEBYSCHEFF-Tiefpass zugrunde, hat dieser das charakteristische Polynom

KT(F) = cos(n * arccos(F))   (Gl. 1)

Der Verlauf des Betrages der Übertragungsfunktion des Filters ist dann

FT(F) = 1 / sqrt(1 + (ε * KT(F))^2) (Gl. 2)

Die Polstellen des üblichen TSCHEBYSCHEFF-Tiefpasses ergeben sich u.a. aus

1 + (ε * KT(F))^2 = 0, gelöst nach F = ω/ω_g (Gl. 3)

Darin ist ε eine Konstante, die sich aus der gewünschten Welligkeit im Durchlassbereich ergibt

ε = sqrt(10^(0.1 * Welligkeit/dB) - 1)

Jetzt die Modifikationen:

Zunächst wird eine zweite Konstante ϕ eingeführt, wobei gelten soll

ϕ / ε = 1/sqrt(2) ... 1/sqrt(3)

Dabei sind die Zahlen sqrt(2) ... sqrt(3) empirisch ermittelt worden. Wählt man sqrt(2), wird das Filter im Übergangsbereich etwas steiler, aber der Durchlassbereich wird mehr verändert. Wählt man sqrt(3), wird das Filter nicht ganz so steil, aber der Durchlassbereich durch Veränderungen verschont.

An der Stelle F=1 ist KT(F)=1 , damit reduziert sich die Polstellen-Gleichung (Gl. 3) zu

$$1 + \varepsilon^2 = 0$$

Jetzt wird die erste der gesuchten Zähler-Polstellen für den CAUER-Tiefpass zusammen mit der Konstanten ϕ mathematisch in die Gleichung eingefügt

$$1 + (\varepsilon/\phi/(F-Pol1))^2 = 0 \qquad \text{(Gl. 4)}$$

und an der Stelle F=1, aufgelöst nach Pol1.

Die nachste Zähler-Polstelle kann bestimmt werden mit

$$1 + (\varepsilon/\phi/(F-Pol1)/(F-Pol2))^2 = 0 \quad \text{(Gl. 4a)}$$

und an der Stelle F=1, unter Einsetzen von Pol1, aufgelöst nach Pol2 u.s.w..

Damit sind die Zähler-Polstellen vorgegeben.

Die üblichen TSCHEBYSCHEFF-Polstellen aus Gl. 3 werden jetzt folgendermaßen modifiziert, indem die berechneten Polstellen ohne die Konstante ϕ eingesetzt werden in Gleichung 3

$$1 + (\varepsilon * KT(F) / (F - Pol1) / (F - Pol2))^2 = 0 \qquad \text{(Gl. 5)}$$

Die Lösung dieser Gleichung liefert die modifizierten Nullstellen für das TSCHEBYSCHEFF-Verhalten.

Als Anlage findet man ein berechnetes Beispiel dieses Syntheseverfahrens und die anschließende Analyse des mit diesem Verfahren berechneten CAUER-Tiefpasses. Die Berechnungen wurden durchgeführt mit dem Mathematikprogramm MuPAD 3.1.

Beim Vergleich des Betrages der Übertragungsfunktion des Filters in Synthese und Analyse, ist zu bedenken, dass es sich um eine Approximation handelt.

3.0 Literaturverzeichnis

[1] Prof. Nadenau, Vorlesung Theoretische Nachrichtentechnik
[2] HERPY/BERKA, Aktive RC-Filter
[3] TIETZE/SCHENK, Halbleiterschaltungstechnik