

**Amplitudenunabhängige  
Impulslängenbestimmung  
mit Hilfe der  
Cepstrum-Analyse**

Dipl.-Ing. Leo Baumann

Datum 15.03.1999

## Inhalt

- 1.0 Kontinuierliche Berechnung
- 2.0 Diskrete Berechnung
- 3.0 Einige Beispiele
- 4.0 Kommentar

## 1.0 Kontinuierliche Berechnung

Die Fouriertransformation ist ein wesentliches Hilfsmittel der Ingenieurwissenschaften. Die Fouriertransformierte eines Signals im Zeitbereich  $s(t)$  ist die kontinuierliche Spektralfunktion des Signals im Frequenzbereich  $S(f)$ . Die Berechnung erfolgt mit

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

Die Rücktransformation in den Zeitbereich erfolgt mit

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(f) e^{i2\pi ft} df$$

Die Cepstrum-Analyse ist ein auf die Fouriertransformation aufbauendes analytisches Verfahren.

Die Berechnung des Cepstrums eines Signals  $s(t)$  aus dem Zeitbereich erfolgt durch die komplexe Logarithmierung der Fouriertransformierten  $S(f)$  und anschließende inverse Fouriertransformation.

$$C(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(s(f)) e^{i2\pi ft} df$$

Die Fouriertransformierte eines realen Zeitsignals ist eine komplexe Funktion. Bei ihrer Logarithmierung beschränkt man sich auf die Hauptwerte.

$$\ln(x+iy) = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) + i[\operatorname{sgn}(y) \cdot \pi/2 - \arctan(x/y)]$$

Eine Anwendung der Cepstrum-Analyse ist die Erkennung von Signalechos, wie sie zum Beispiel bei Mehrwegausbreitung auftreten [1].

Ziel dieser Arbeit ist es zu zeigen, daß man mit Hilfe des Cepstrums, unabhängig von der Signalamplitude im Zeitbereich, die Dauer von Impulsen bestimmen kann.

Ist die Zeitfunktion eines Impulses beispielsweise

$$s(t) = a \cdot \sin(2\pi f_0 t) \quad | \quad 0 \leq t \leq \tau$$

ergibt sich die Fouriertransformierte von  $s(t)$  mit

$$S(f) = \int_0^{\tau} a \cdot \sin(2\pi f_0 t) e^{-i2\pi f t} dt$$

und nach kurzer Rechnung eine für die Logarithmierung günstige Form des Teils des Spektrums oberhalb  $f_0$ .

$$S(f) = \frac{a \cdot (f - f_0)}{2\pi(f^2 - f_0^2)} \cdot [1 - e^{-i2\pi(f+f_0)\tau}]$$

$$\ln(S(f)) = \ln\left(\frac{a \cdot (f - f_0)}{2\pi(f^2 - f_0^2)}\right) + \ln[1 - e^{-i2\pi(f+f_0)\tau}]$$

Entsprechend der Eigenschaften der Fouriertransformation lassen sich die Summanden einzeln in den Zeitbereich transformieren. Eine gleiche Rechnung läßt sich für den Teil des Spektrums unterhalb  $f_0$  durchführen.

Es ist zu erwarten, daß im Cepstrum von  $s(t)$  die Zeitdauer des Impulses zu erkennen ist, weil die Impulslänge formal enthalten ist. Wegen seines komplexen Anteils soll aus diesem Grund im Weiteren der zweite Summand betrachtet werden.

Die Transformation in den Zeitbereich erfolgt mit

$$C(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1 - e^{-i2\pi(f+f_0)\tau}) e^{i2\pi f t} df$$

Eine partielle Integration führt hier zu erheblichen Schwierigkeiten, der erste Faktor im Integral läßt sich aber durch eine Reihe darstellen.

$$\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k/k \quad | \quad k \in \mathbb{N}$$

Durch Einsetzen erhält man

$$C(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{i2\pi(f+f_0) [f \cdot t / (f_0+f) - k \cdot \tau]} df$$

$$C(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k \cdot g)} \delta(t - k \cdot \tau) \quad | k \in \mathbb{N}$$

$\delta(t-\tau)$  ist die Delta-Funktion, mit der Eigenschaft an der Stelle ihres Auftretens nicht definiert und ansonsten Null zu sein. Ihre Fläche ist Eins [2],[3],[4]. Sie entspricht einem Nadelimpuls.

Die Nadelimpulse treten also im Cepstrum von  $s(t)$  zu den Zeitpunkten  $n\tau$  auf, welche ganze Vielfache der Impulslänge von  $S(t)$  entsprechen.

Darüber hinaus erkennt man an der Gleichung, daß die Amplitude der Nadelimpulse von der Amplitude von  $s(t)$  unabhängig ist. Der Faktor  $g$  enthält nur Vielfache von  $2\pi$  und der Impulsdauer.

## 2.0 Diskrete Berechnung

Eine Abtastserie bestehend aus  $M=16384$  Abtastwerten sei zu  $1/8$  der Anzahl bestückt mit Werten der Funktion

$$s(m) = a \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot m / M)$$

wobei zunächst  $a=32768$  angenommen wird.

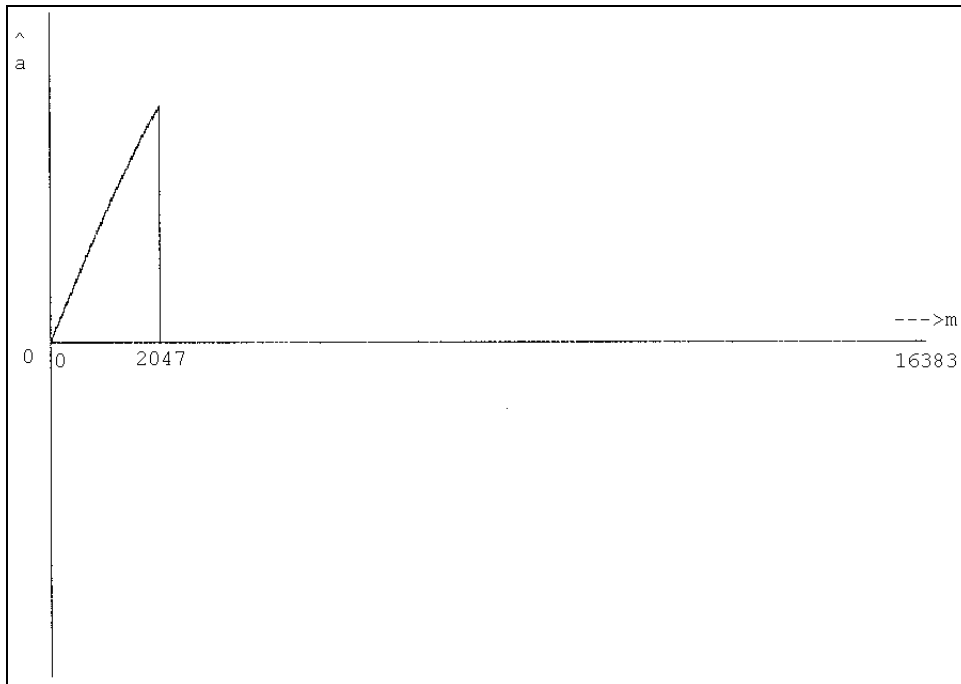


Bild 1 - Abtastserie  $s(m)$

Um spektrale Verbreiterungen im diskreten Spektrum von  $s(m)$  zu vermeiden, wird die Abtastserie mit der Hanning-Funktion bewertet.

$$w(m) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi m/M))$$

Die Transformation in den Frequenzbereich wird durchgeführt mit

$$S(n) = \sum_{m=0}^{M-1} s(m) e^{-i2\pi mn/M}$$

Eine Fast-Fourier-Transformation berechnet die diskrete Fouriertransformierte, die jetzt eine Annäherung der Koeffizienten an die Fourierreihe ist.

Bild 2 zeigt den Betrag der Spektrallinien für positive Frequenzen ( $0 \leq n \leq N/2$ ) und negative Frequenzen ( $N/2 < n < N$ ). Da es sich um eine reale Abtastserie handelt, sind die Spektralwerte der negativen Frequenzen konjugiert-komplex zu denen der positiven Frequenzen.

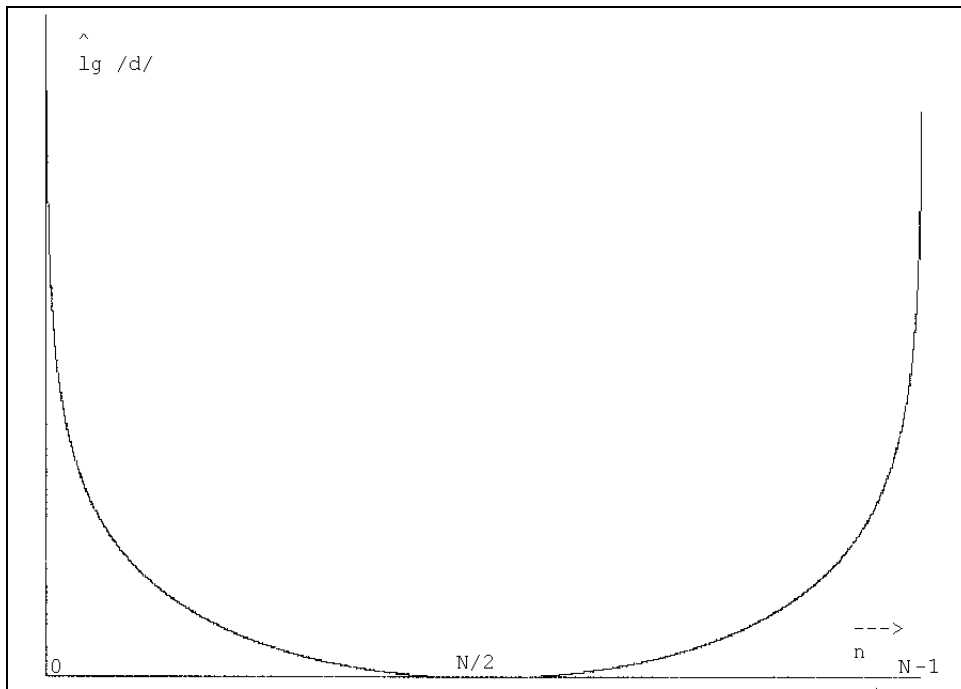
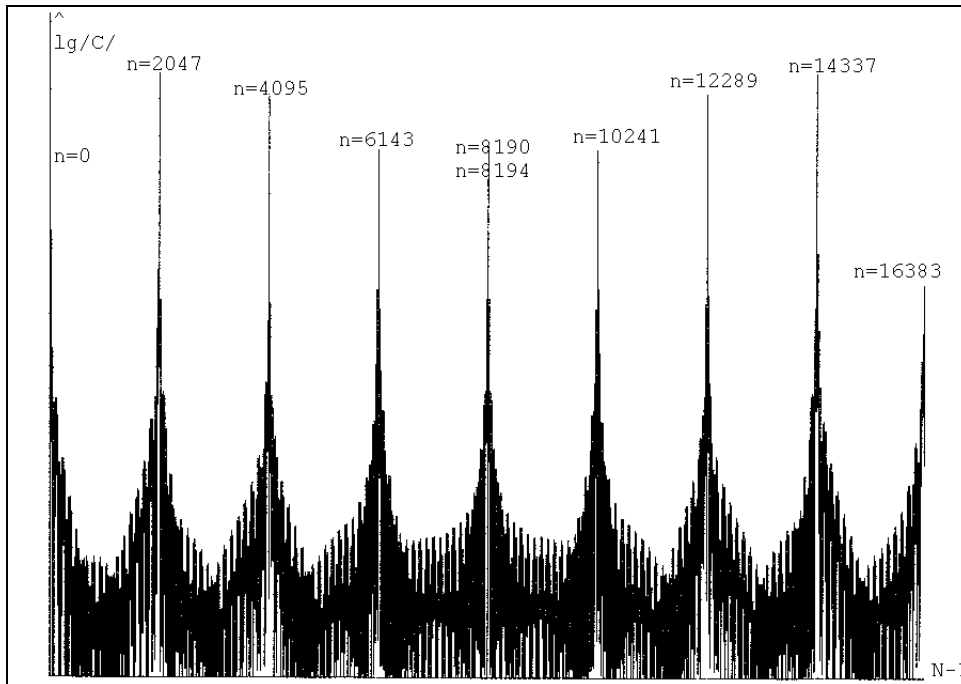


Bild 2 - halblogarithmische Darstellung des Betrages des diskreten Spektrums

Anschließend erfolgt die komplexe Logarithmierung der  $N$  Spektralwerte.

Eine inverse Fast-Fourier-Transformation berechnet dann das Cepstrum von  $s(m)$ .

Bild 3 zeigt den Betrag des Cepstrums bestehend aus  $N$  Cepstralwerten. Im Gegensatz zum diskreten Spektrum ist die zweite Hälfte nicht zur ersten Hälfte der Daten redundant. Die zeitliche Anordnung der Delta-Funktionen, die aufgrund der zeitbegrenzten Berechnung als Summe von  $\cos(x)/x + i \cdot \sin(x)/x$  erscheinen ist jedoch symmetrisch zu  $n=N/2$ .

Bild 3 - halblogarithmische Darstellung des Betrages des Cepstrums von  $s(m)$ 

Man findet die Delta-Funktionen bei  $N/2+k*m_{\tau}+1$  und  $N/2-k*m_{\tau}-1$ , wobei  $m_{\tau}$  in diesem Beispiel  $1/8 * M$  ist. Wenn  $T_A$  das Abtastintervall ist, ergibt sich die Impulslänge u.a. zu

$$\tau = (n_k - N/2 - 1) / k * T_A.$$

Durch Transformation in den Frequenzbereich, Entlogarithmierung, Rücktransformation in den Zeitbereich und inverser Hanning-Bewertung läßt sich die Abtastserie  $s(m)$  exakt zurückgewinnen, wie bei der einfachen Fouriertransformation auch.

In Worten läßt sich das Auftreten der Delta-Funktionen folgendermaßen formulieren:

Delta-Funktionen treten zu Zeitpunkten auf an denen ein um  $\tau$  verspätetes und  $g$  verstärktes Echo von  $s(t)$  dieses linear überlagert oder  $s(t)$  sich verstärkt um  $g$  nach der Zeit  $\tau$  selbst linear überlagert, wie im o.g. Beispiel oder an anderen im mathematischen Sinne unstetigen Stellen von  $s(t)$ .

Die Frage in wie weit  $s(n)$  bzw.  $s(t)$  sich über  $\tau$  hinaus durch Operationen im Cepstrum rekonstruieren läßt, sei hier ausgeklammert.

Im Übrigen läßt sich an Stelle der komplexen Logarithmierung auch eine Koordinatentransformation von rechtwinkligen zu polaren Koordinaten einsetzen. Die anschließende inverse FFT ergibt die gleiche zeitliche Positionierung und Amplitude der



Delta-Funktionen im Cepstrum, wobei eine Berechnung mit Nullstellen im Spektrum erlaubt ist.

Bild 4 zeigt das Cepstrum von  $s(m)$  mit  $a=1$ , was einer Dämpfung von 90.31 dB gegenüber dem o.g. Beispiel entspricht.

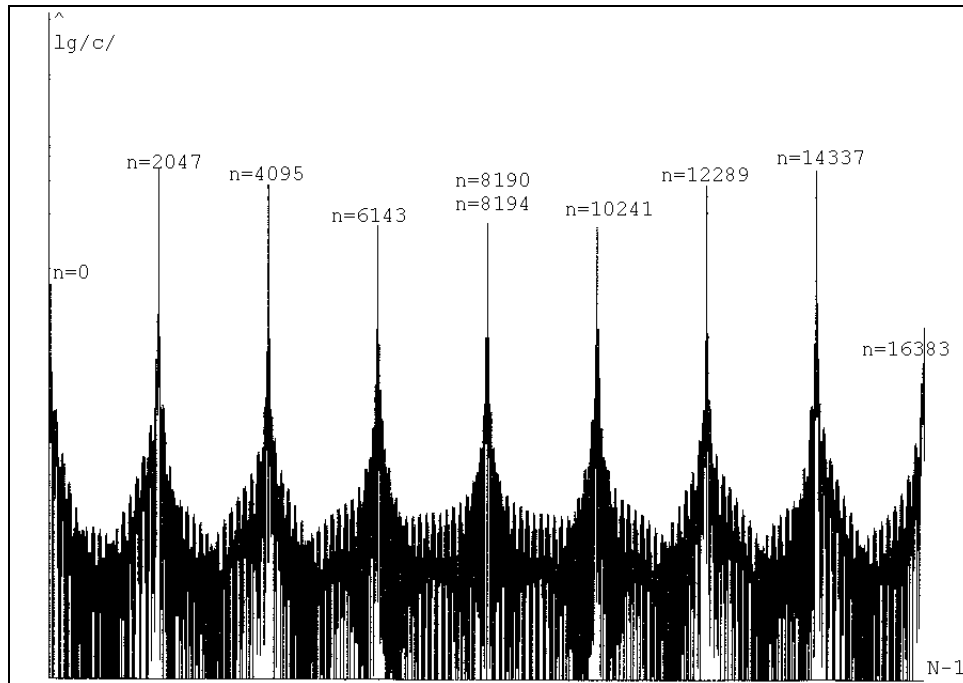


Bild 4 - halblogarithmische Darstellung des Betrages des Cepstrums von  $s(m)$   
mit  $s(m) = 1 * \sin(2\pi m/M)$

Es ist bemerkenswert, daß die Amplitude der Delta-Funktionen sowie ihre zeitliche Anordnung sich von denen des Cepstrums der Abtastserie  $s(m) = 32768 * \sin(2\pi m/M)$  nicht unterscheidet.

### 3.0 Einige Beispiele

Bild 5 zeigt den Betrag des komplexen Cepstrums eines unipolaren rechteckförmigen Impulses über  $\frac{1}{4}$  der Anzahl der Abtastwerte. Die Delta-Funktionen findet man bei  $n+1 = \frac{1}{4} \cdot N$  und  $n-1 = N - \frac{1}{4} \cdot N$ . Die Amplitude der Abtastserie ist 32768.

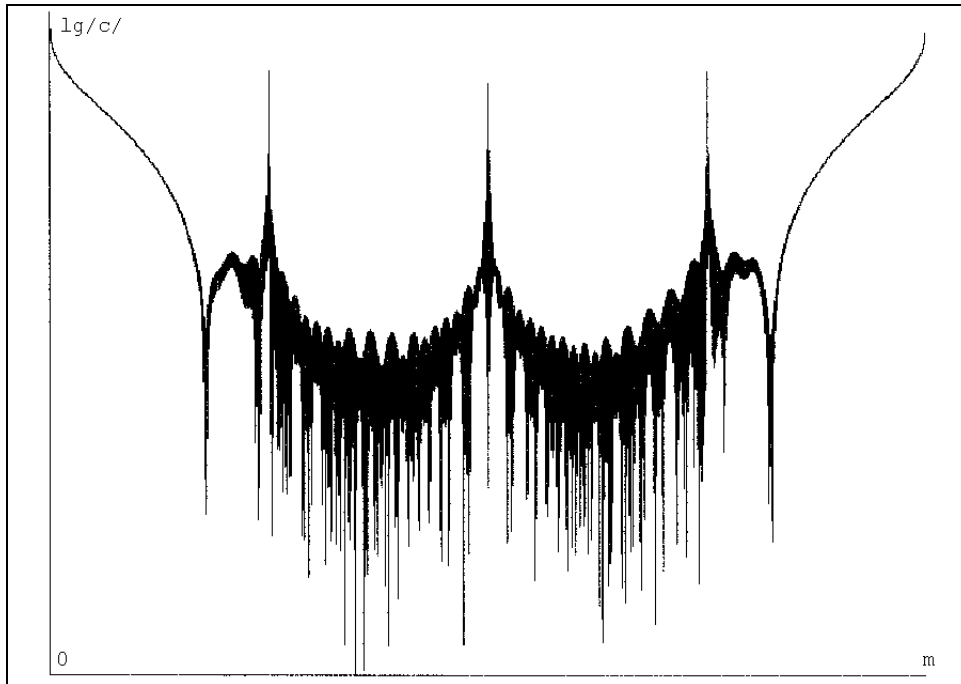


Bild 5 - Cepstrum, halblogarithmisch dargestellt

Bild 6 ist der Betrag des komplexen Cepstrums eines unipolaren Rechteckimpulses über die halbe Anzahl der Abtastwerte.

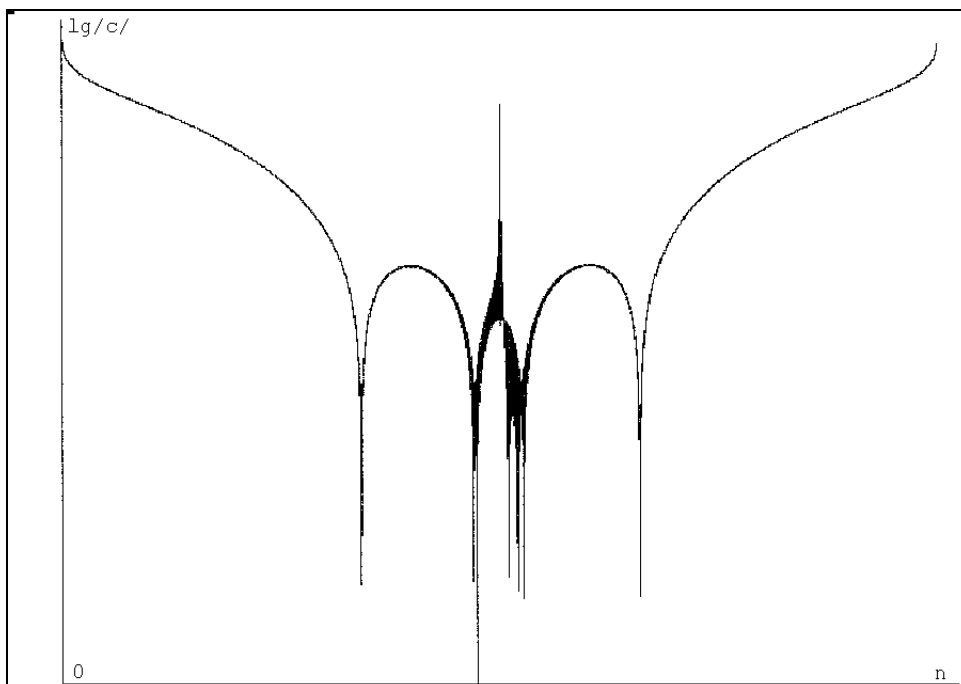


Bild 6 - Cepstrum, halblogarithmisch dargestellt

Bild 7 ist das komplexe Cepstrum eines unipolaren Rechteckimpulses über  $\frac{3}{4}$  der Anzahl der Abtastwerte. Die Delta-Funktion mit der maximalen Amplitude findet man bei  $n-1 = 0.75 * N$ .

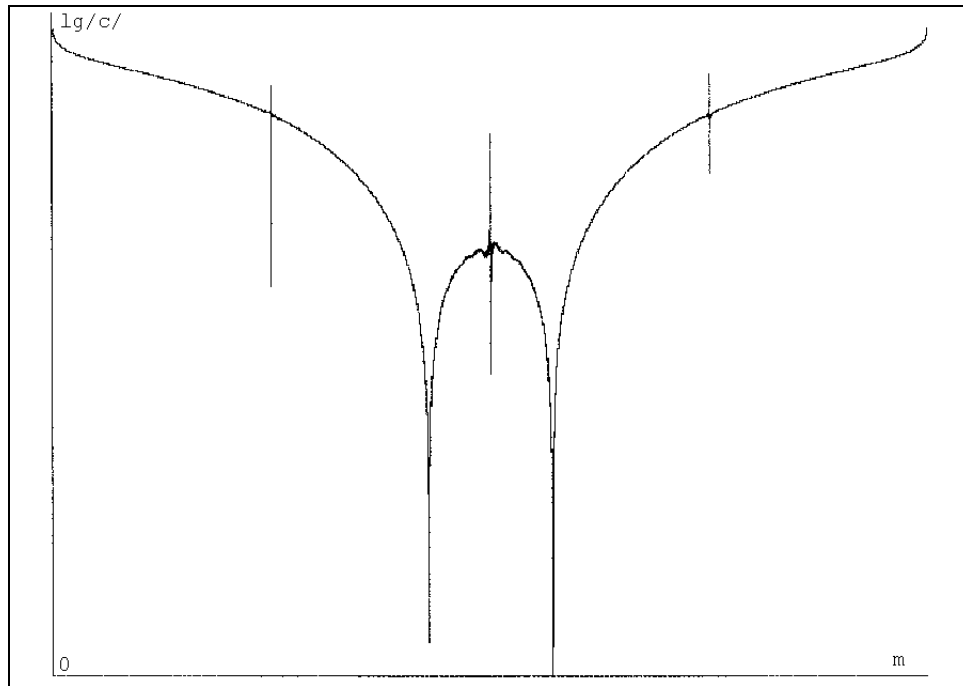


Bild 7 - komplexes Cepstrum, halblogarithmisch dargestellt

Bild 8 zeigt das komplexe Cepstrum eines unipolaren Rechteckimpulses, der ab  $m = \frac{1}{4} * M$  linear abfällt bis auf Null bei  $m = \frac{1}{2} * M$ . Der Delta-Impuls mit der maximalen Amplitude liegt bei  $n-1 = \frac{1}{4} * M$ . Auch hier ist die Amplitude des Impulses 32768.

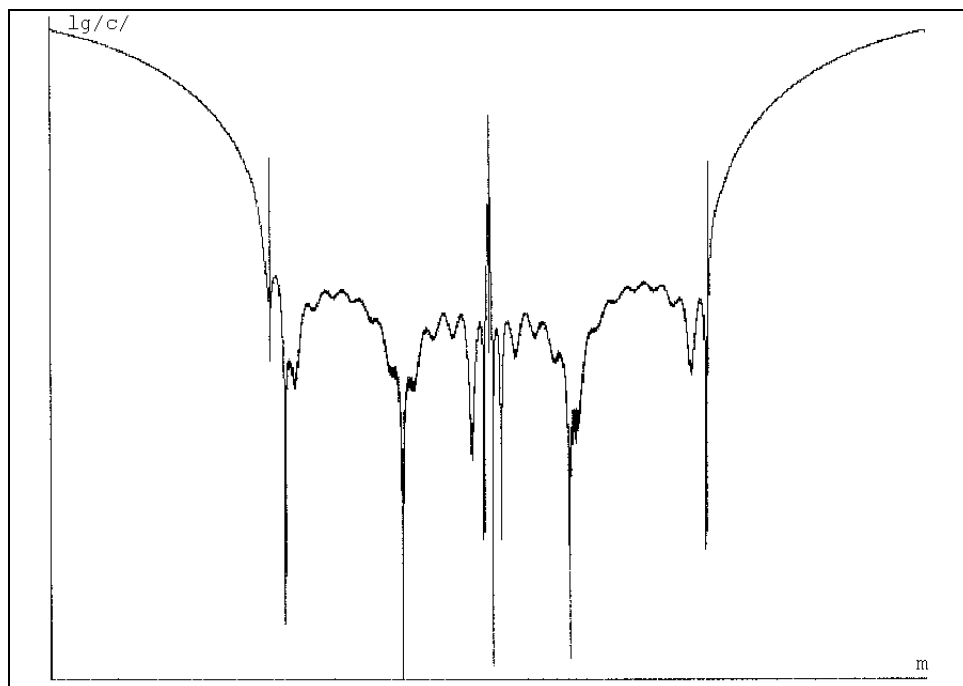


Bild 8 - komplexes Cepstrum, halblogarithmisch dargestellt

## Kommentar

Wenn man einige Transformationspaare mit Hilfe der Fouriertransformation berechnet und grafisch dargestellt hat, erkennt man die Zusammenhänge zwischen einer Zeitfunktion und ihrer Transformierten leichter. Beispielsweise lassen kurze impulsartige Änderungen in der Zeitfunktion auf größere Werte der Transformierten bei den höheren Frequenzen im Spektrum schließen.

Dem Anwender muß bewußt sein, daß der gesamte Informationsgehalt der Zeitfunktion unverändert in ihrer Transformierten enthalten ist. Dieser Sachverhalt führt dann direkt zu der Frage: Lassen sich Komponenten wie Störungen oder Rauschen durch elementare mathematische Operationen aus der Fouriertransformierten isolieren? Diese Frage stellte sich auch der Autor, als er die aus seiner Sicht geniale Theorie der Fouriertransformation an der Fachhochschule Krefeld erlernen durfte.

Eine solche elementare mathematische Operation ist die Logarithmierung des Spektrums, was im o.g. Beispiel der kontinuierlichen Berechnung zu einem Summanden führt, der die Impulsdauer in komplexer Form enthält.

Wie bereits angedeutet handelt es sich um eine mathematische Unstetigkeit in der Zeitfunktion (Lücke oder Knick). Eine Möglichkeit des Entstehens ist die Überlagerung durch ein Echo, wobei die Unstetigkeit in der Zeitfunktion zu dem Zeitpunkt entsteht, an dem beispielsweise Sendeimpuls und Empfangsecho zeitlich aufeinandertreffen. Dieser Sachverhalt ergibt die enormen Empfindlichkeiten einiger handelsüblicher RADAR-Geräte, wie der Autor bei der Bedienung eines Schiffsradars selbst erleben durfte (bei glatter See ließen sich im Nahbereich von 0.5 sm auf dem Wasser schwimmende Getränkedosen aus Aluminium lokalisieren).

Denkbar sind, wie in diesem Aufsatz gezeigt, auch die Bestimmung der Zeitdauer bis zur Unstetigkeitsstelle. Die Impulslängenbestimmung würde etwa mit der Genauigkeit der Abtastfrequenz erfolgen.

Weiterhin ist zu überlegen, in wie weit mathematische Manipulationen im Cepstrum und anschließende Rücktransformation zur Rekonstruktion eines unterbrochenen Signals beitragen können.

Darüber hinaus könnte man auch über andere elementare mathematische Operationen, angewendet auf die Fouriertransformierte nachdenken.

**Literaturverzeichnis**

[1] KEMERAIT, R.C. and D.G. CHILDERS, „Signal Detection and Extraction by Cepstrum Techniques“, IEEE Trans. Info. Theory, Vol. IT-18, No. 6, pp. 745-759

[2] BRIGHAM, E.O., FFT Schnelle Fouriertransformation, Oldenbourg

[3] Bartsch, Taschenbuch mathematischer Formeln, Harri Deutsch, Thun u. Frankfurt/Main

[4] STEARNS, S.D., Digitale Verarbeitung analoger Signale, Oldenbourg